基礎数学B講義 補充演習問題 その1 解説

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (２０１５年度２学期)

以下の問題では，$\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$（正の整数全体の集合，0 以外の自然数全体の集合）とする．また，$\mathbf{Z}$ は整数全体の集合，$\mathbf{Q}$ は有理数全体の集合，$\mathbf{R}$ は実数全体の集合，$\mathbf{C}$ は複素数全体の集合を表す．$\mathbf{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \dots,$ には，特に断らない限り，通常の位相（Euclid 距離から定まる Euclid 位相）を入れる．

補充問題１． 次の問いに答えよ．
(1) $A = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ とおくと，

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2 \text{ または } x - 2 \in A\}$$

を満たすことを証明せよ．
(2) $\mathbf{N}$ の部分集合 A で，

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2 \text{ または } x - 2 \in A\}$$

を満たすものをすべて求めよ．

解説． 演習プリント問題として出題した問題である．(1) の解答例はすでに掲載されている．(2) の答えは，$A = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ に限る，である．たとえば，$A = \{1, 2\}$ は条件を満たさない．実際，

$$\{1, 2\} = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2 \text{ または } x - 2 \in \{1, 2\}\}$$

は成立しない．$x = 4$ は右辺に属するが，左辺には属さない．

補充問題２． A_n を次のような集合とするとき，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ．

$$A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{n} < x \leq 2 - \frac{1}{n}\}.$$

解説． $n = 1, 2, 3$ と図を書いて予想を立ててから証明するとよい．結論は $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 2)$, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ である．

補充問題３． 写像 $f : X \to Y$, $A, B \subset X$ について，次の問いに答えよ．
(1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ が成り立つことを示せ．
(2) f が単射ならば，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つことを示せ．

解説． (1) は演習問題で解いている．(2) f が単射のとき，$f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$ を示そう．$y \in f(A) \cap f(B)$ とする．$y \in f(A)$ であるから，$x \in A$ が存在して，$f(x) = y$ となる．また，$y \in f(B)$ であるから，$x' \in B$ が存在して，$f(x') = y$ となる．$f(x) = f(x')$ で，f が単射だから，$x = x'$ となる．以下略．

補充問題４． X, Y を集合，$f : X \to Y$ を写像とし，A' を Y の部分集合とするとき，$f(f^{-1}(A')) = A' \cap f(X)$ を示せ．

解説． レポート問題として解説済み．

補充問題５． X, Y を集合，$f : X \to Y$ を写像とし，A を X の部分集合とするとき，$f^{-1}(f(A)) \supset A$ を示せ．また，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2, A = [0,1]$ （ゼロイチ区間）という例について，$f(A)$ および $f^{-1}(f(A))$ を求め，$f^{-1}(f(A)) \neq A$ となることを確認せよ．

解説． レポート問題として解説済み．

補充問題６． 与えられた集合 X, Y に対して，全単射 $f : X \to Y$ の例を作れ．
(1) $X = \mathbf{Z},\ Y = \mathbf{N}$.　(2) $X = \mathbf{R},\ Y = (0, \infty)$.　(3) $X = (0, 1)$, $Y = (-1, 2)$.
(4) $X = [0, \infty),\ Y = (0, \infty)$.

解説． (1) は，演習問題として提出済み．(2) は指数関数を考えよ．(3) $f(x) = 3x - 1$. (4) は，$x \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ に対しては，$f(x) = x + 1$ とおき，$x \notin \{0\} \cup \mathbf{N}$ に対しては，$f(x) = x$ とおけばよい．

補充問題７． 写像 $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ について，次をそれぞれ示せ．
(1) $g \circ f$ が全射ならば g が全射である．
(2) $g \circ f$ が単射ならば f が単射である．

解答例． (1) 任意の $z \in Z$ をとる．$g \circ f$ が全射だから，$x \in X$ が存在して，$z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ となる．$f(x) \in Y$ だから，g は全射である．
(2) $x, x' \in X$ とし，$f(x) = f(x')$ とする．そのとき $g(f(x)) = g(f(x'))$ となる．すなわち，$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ となる．$g \circ f$ が単射だから，$x = x'$ である．したがって，f は単射である．

補充問題８． 次の問いに答えよ．
(1) 写像 $f : X \to Y$ について，f のグラフを $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ で定義する．２つの写像 $f, g : X \to Y$ について，

$$\Gamma_f = \Gamma_g \text{（集合の相等）} \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \text{（写像の相等）}$$

という同値性が成立することを証明せよ．
(2) 写像 $f : X \to Y$ に対して，$\Gamma_f^{-1} := \{(f(x), x) \in Y \times X \mid x \in X\}$ とおく．いま，写像 $g : Y \to X$ について，$\Gamma_f^{-1} = \Gamma_g$ が成り立っているとするとき，f, g はどういう関係にあるか述べよ．

解説． レポート問題として解説済み．

補充問題９． X を集合とする．$E=\{0,1\}$ とおく．部分集合 $A\subset X$ に対して，写像 $\Phi_A:X\to E$ を $\Phi_A(x)=1\ (x\in A), \Phi_A(x)=0\ (x\in X\setminus A)$ によって定める．次の問いに答えよ．
(1) 対応 $A\to\Phi_A$ によって，X のべき集合 $\mathcal{P}(X)$ と $E^X=\{f\mid f:X\to E\text{写像}\}$ の間に全単射が定めることを確認せよ．
(2) 写像 $1-\Phi_A:X\to E$ を

$$(1-\Phi_A)(x)=1-\Phi_A(x)\ (x\in X)$$

によって定める．$1-\Phi_A$ に対応する X の部分集合は何か．
(3) A,B を X の部分集合とするとき，写像 $\min\{\Phi_A,\Phi_B\}:X\to E$ を

$$(\min\{\Phi_A,\Phi_B\})(x)=\min\{\Phi_A(x),\Phi_B(x)\}\ (x\in X)$$

によって定め，また，写像 $\max\{\Phi_A,\Phi_B\}:X\to E$ を

$$(\max\{\Phi_A,\Phi_B\})(x)=\max\{\Phi_A(x),\Phi_B(x)\}\ (x\in X)$$

によって定める．それぞれ $\min\{\Phi_A,\Phi_B\},\max\{\Phi_A,\Phi_B\}$ に対応する X の部分集合は何か．

解説． (1) 写像 $\Phi:\mathcal{P}(X)\to E^X$ を，$\Phi(A)=\Phi_A$ により定める．$A,B\in\mathcal{P}(X)$ とし，$\Phi_A=\Phi_B$ とする．このとき，$x\in A\Leftrightarrow\Phi_A(x)=1\Leftrightarrow\Phi_B(x)=1\Leftrightarrow x\in B$ より，$A=B$ が成り立つ．したがって，Φ は単射である．次に，$f\in E^X$ とする．$A:=f^{-1}(\{1\})$ とおく．このとき，$\Phi(A)(x)=1\Leftrightarrow x\in A\Leftrightarrow f(x)=1$ が成り立つ．したがって，$\Phi(A)=f$ が成り立つ．よって，Φ は全射である．以上により，Φ は全単射である．
(2) A^c (3) それぞれ $A\cap B$, $A\cup B$ である．

補充問題１０． 写像 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ を，$n\in\mathbf{N}$（0 でない自然数）に対し，

$$f(n):=(n\text{ を 2 進法表示したときに現れる 1 の数}),$$

によって定める．たとえば，5 は２進法で表示すると “101” だから $f(5)=2$ である．このとき，「任意の $p,q\in\mathbf{N}$ に対し，ある $n\in\mathbf{N}$ があって，$f(n)=p, n\geq q$」（つまり，全射であり，しかも，$f^{-1}(\{p\})$ が非有界）という条件が成り立つことを示せ．

解説． レポート問題として解説済み．

補充問題１１． $X=\{A\mid A\text{ は }\mathbf{N}\text{ の有限部分集合}\}$ とおくとき，X が可算集合であることを示せ．

解説． X が可算無限集合であることを示す．そのために，$m\in\mathbf{N}$ に対して，

$$X_m:=\{A\in X\mid\forall n\in A, n\leq m\}$$

とおく．たとえば，$X_1=\{\emptyset,\{1\}\}$, $X_2=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ である．$X=\cup_{m=1}^{\infty}X_m$ が成り立つ (証明省略)．
任意の $m\in\mathbf{N}$ に対して，X_m の要素の総数は 2^m である．X_1 から順に，要素に番号を付けていく．X_{m-1} の要素に番号が

$$A_1,A_2,\dots,A_{2^{m-1}}$$

とついたら，$X_m \setminus X_{m-1}$ の要素に番号を

$$A_1 \cup \{m\}, A_2 \cup \{m\}, \ldots, A_{2^{m-1}} \cup \{m\}$$

の順につけていけば，2^m までの番号が付けられる．こうして帰納的に，$\mathbf{N}$ と X の間に全単射が構成できる．

補充問題１２． $n \in \mathbf{N}$ とし，$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．次の問いに答えよ．
(1) X から X への全単射は，全部で何個あるか説明せよ．
(2) 全単射 $f : X \to X$ に対し，ある $m \in \mathbf{N}$ が存在して，$f^m = f \circ \cdots \circ f$（$m$ 個の合成）が恒等写像になることを示せ．

解説． レポート問題として解説済み．

補充問題１３． $\mathbf{R}$ の閉区間の直積 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ は，$\mathbf{R}^2$ の閉集合であることを証明せよ．
解説． $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく．

$$\begin{aligned} A^c &= ((\infty, a_1) \cup (b_1, \infty)) \times ((\infty, a_2) \cup (b_2, \infty)) \\ &= (\infty, a_1) \times (\infty, a_2) \cup (\infty, a_1) \times (b_2, \infty) \cup (b_1, \infty) \times (\infty, a_2) \cup (b_1, \infty) \times (b_2, \infty) \end{aligned}$$

が $\mathbf{R}^2$ の開集合であることを示す．

$C = (b_1, \infty) \times (b_2, \infty)$ が $\mathbf{R}^2$ の開集合であることを示す．
$x = (x_1, x_2) \in C$ とする．$b_1 < x_1, b_2 < x_2$ である．$\delta = \min\{x_1 - b_1, x_2 - b_2\}$ とおくと，$B(x, \delta) \subset C$ である．なぜなら，$y = (y_1, y_2) \in B(x, \delta)$ とすると，

$$|y_1 - x_1| \leq \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} < \delta \leq x_1 - b_1$$

であるから，$-(x_1 - b_1) < y_1 - x_1$ であり，$b_1 < y_1$ となる．同様に $b_2 < y_2$ が示されるから，$y \in C$ となる．したがって，$B(x, \delta) \subset C$ であり，x は C の内点である．$x \in C$ は任意だから，C は開集合である．

他の３つの集合も $\mathbf{R}^2$ の開集合であることが同様に示されるので，A^c が $\mathbf{R}^2$ の開集合であり，A は $\mathbf{R}^2$ の閉集合である．

類題． $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ が $\mathbf{R}^2$ の開集合であることを示せ．

補充問題 その２ 基礎数学B

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１５年度後期)

補充問題１４． a，b を $\mathbf{R}^n$ の相異なる２点とするとき，$a \in U,\ b \in V,\ U \cap V = \emptyset$ となる $\mathbf{R}^n$ の開集合 U, V が存在することを示せ．

解説． $a \neq b$ だから，$d(a, b) > 0$ である．$\varepsilon = \frac{1}{2} d(a, b)$ とおき，$U = B(a, \varepsilon), V = B(b, \varepsilon)$ とおく．すると，U, V は $\mathbf{R}^n$ の開集合である．また，$U \cap V = \emptyset$ となる．なぜなら，$x \in U \cap V$ となる点 x が存在するとすると，$d(x, a) < \varepsilon$ かつ $d(x, b) < \varepsilon$ である．すると，$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < 2\varepsilon = d(a, b)$ となり矛盾が導かれる．したがって，$U \cap V = \emptyset$ である．

補充問題１５． $n \in \mathbf{N}$ とする．$A = (0,1) \cup (1,2) \cup \cdots \cup (n-1,n)$ の $\mathbf{R}$ における閉包 $\overline{A}$ を求めよ．

解説. レポート問題として解説済み.

補充問題１６． $\mathbf{R}^n$ の部分集合 M に対し，$\overline{M} = ((M^c)^\circ)^c$ を示せ.

解説. レポート問題として解説済み.

補充問題１７． $\mathbf{R}^n$ における３種類の距離関数 $d_1(x,y) = \|x-y\|, d_2(x,y) = \max_{1\le i\le n}|x_i - y_i|, d_3(x,y) = \sum_{1\le i\le n}|x_i - y_i|$ について，次を示せ.
(1) 任意の $x,y \in \mathbf{R}^n$ について，$d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le d_3(x,y) \le nd_2(x,y)$
(2) それぞれの距離関数が定める位相（開集合系）を，$\mathcal{O}_{d_1}, \mathcal{O}_{d_2}, \mathcal{O}_{d_3}$ とするとき，$\mathcal{O}_{d_1} = \mathcal{O}_{d_2} = \mathcal{O}_{d_3}$ を示せ.

解説. (1) は省略.
(2) まず $\mathcal{O}_{d_2} \subset \mathcal{O}_{d_1}$ を示す．$U \in \mathcal{O}_{d_2}$ とする．任意の $x \in U$ に対して，$\delta > 0$ があって，$B_{d_2}(x,\delta) \subset U$ となる．$d_2(x,y) \le d_1(x,y)$ であるから，$B_{d_1}(x,\delta) \subset B_{d_2}(x,\delta)$ となる．$B_{d_1}(x,\delta) \subset U$ となり，$U \in \mathcal{O}_{d_1}$ となる．
同様にして，$\mathcal{O}_{d_1} \subset \mathcal{O}_{d_3}$ もわかる．
最後に $\mathcal{O}_{d_3} \subset \mathcal{O}_{d_1}$ を示す．$U \in \mathcal{O}_{d_3}$ とする．任意の $x \in U$ に対して，$\delta > 0$ があって，$B_{d_3}(x,\delta) \subset U$ となる．$d_3(x,y) \le nd_2(x,y)$ であるから，$B_{d_1}(x, \frac{1}{n}\delta) \subset B_{d_2}(x,\delta)$ となる．よって，$U \in \mathcal{O}_{d_1}$ である．
以上により，$\mathcal{O}_{d_1} = \mathcal{O}_{d_2} = \mathcal{O}_{d_3}$ が成り立つ.

補充問題１８． $\mathbf{R}^n$ の２点 x,y に対し，実数 $\rho(x,y)(\ge 0)$ が定められ，
(1) $\forall x,y \in \mathbf{R}^n, \rho(x,y) = 0 \iff x = y$，かつ (2) $\forall x,y,z \in \mathbf{R}^n, \rho(x,y) \le \rho(z,x) + \rho(z,y)$
が成り立つとき，ρ は，(3) $\forall x,y,\ \rho(x,y) = \rho(y,x)$ という性質も持つ（したがって，距離関数の定義をすべて満たす）ことを示せ.

解説. レポート問題として解説済み.

補充問題１９． (X,d) を距離空間とするとき，次の問に答えよ.
(1) X の部分集合 U が開集合であるということの定義を述べよ.
(2) X の各点 x について，x を含む開集合の可算族 $\{U_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ が存在し，x を含む任意の開集合 U に対し，ある $m \in \mathbf{N}$ があって，$U_m \subset U$ となることを示せ.（X は**第一可算公理を満たす**という.）
(3) X が稠密な可算部分集合をもつとする．このとき，X の開集合の可算族 $\{V_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ が存在し，X の任意の開集合 U に対し，$\Gamma \subset \mathbf{N}$ があって，$U = \cup_{m\in\Gamma} U_m$ となることを示せ.（X は**第二可算公理を満たす**という.）
(4) 相異なる２点 $x,y \in X$ に対し，開集合 U,V が存在し，$x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ となること

を示せ．(X は **Hausdorff 空間である**という．) (ヒント：異なる２点 $x, y \in X$ について，$d(x,y) > 0$ である．)

解説. (1) $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \subset U$.
(2) $U_m = B(x, \frac{1}{m})$ とすればよい．
(3) S を X の稠密な可算部分集合とする．X の開集合族 $\{B(x, \frac{1}{m}) \mid x \in S, m \in \mathbf{N}\}$ は $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ で番号付けられるから，$\mathbf{N}$ で番号付けられる．これを改めて $\{V_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ とすればよい．
(4) $\varepsilon = \frac{1}{2} d(x,y) > 0$ とおき，$U = B(x,\varepsilon), V = B(y,\varepsilon)$ とおけばよい．

補充問題２０. 距離空間 $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ に対し，$X = X_1 \times X_2$ 上の関数 d, d' をそれぞれ

$$d(x,y) := \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2}, \quad d'(x.y) := d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$$

$(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X)$ によって定める．次の問いに答えよ．
(1) $d : X \times X \to \mathbf{R}$ は X 上の距離関数であることを示せ．
(2) $d' : X \times X \to \mathbf{R}$ は X 上の距離関数であることを示せ．
(3) ２つの距離空間 (X,d) と (X,d') について，恒等写像 $f = \mathrm{id}_X : (X,d) \to (X,d')$ は連続写像であることを示せ．

解説. レポート問題として解説済み．

補充問題２１. (X,d) を距離空間，$A \subset X$ とする．A が**全有界**とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，有限個の点 $a_1, \ldots, a_p \in A$ が存在して，$A \subset B(a_1,\varepsilon) \cup \cdots \cup B(a_p,\varepsilon)$ が成り立つときに言う．A が全有界のとき，A の可算部分集合 $S = \{a_m \mid m \in \mathbf{N}\}$ があって，$\overline{S} \supset A$ が成り立つことを示せ．

解説. 仮定より，任意の $m \in \mathbf{N}$ について，有限集合 $S_m \subset A$ が存在して $A \subset \bigcup_{a \in S_m} B(a, \frac{1}{m})$ が成り立つ．$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$ は可算集合であり，$\overline{S} \supset A$ が成り立つ．なぜなら，任意の $x \in A$ をとる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$m \in \mathbf{N}$ を $\frac{1}{m} < \varepsilon$ になるようにとると，$a \in S_m$ が存在して，$x \in B(a, \frac{1}{m})$ となり，$d(x,a) < \frac{1}{m}$ となって，$a \in B(x, \frac{1}{m}) \cap A \subset B(x,\varepsilon) \cap A$ であり，$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となり，$x \in \overline{S}$ となる．

補充問題２２. (X,d) を距離空間，$x \in X$ と $A (\neq \emptyset) \subset X$ に対し，$d(x,A) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$ と定める．このとき次の問いに答えよ．
(1) 任意の $x, x' \in X$，$a \in A$ に対し $d(x,A) - d(x,x') \leq d(x',a)$ となることを示せ．
(2) 写像 $f : X \to \mathbf{R}$ を $f(x) := d(x,A) \in \mathbf{R}, (x \in X)$, で定めるとき，$f$ が連続であることを示せ．

解説. (1) 任意の $x, x' \in X, a \in A$ について，$d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,x') + d(x',a)$ より．
(2) $f(x) - d(x,x') \leq d(x',a)$ が任意の $a \in A$ について成り立つから，右辺の下限をとって，$f(x) - d(x,x') \leq f(x')$ が成り立つ．よって

$$f(x) - f(x') \leq d(x,x')$$

が成り立つ．$x, x' \in X$ は任意だから，

$$f(x') - f(x) \leq d(x',x) = d(x,x')$$

も成り立つ．したがって，

$$|f(x)-f(x')| \leq d(x,x')$$

が成り立つ．よって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta=\varepsilon$ ととれば，$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$ となる．したがって，f は連続関数である．

補充問題２３． $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が点列コンパクトであるための必要十分条件は，A が有界閉集合であることを示せ．

解説． 講義中に解説する予定．

補充問題２４． $\mathbf{R}^n$ の点列 $x(1),x(2),x(3),\dots$ が条件

$$|x(\ell)-x(m)| \geq 1 \ (\ell > m \geq 1)$$

を満たすとする．このとき，$\lim_{m\to\infty}|x(m)|=\infty$ を示せ．

解説． 結論「$\lim_{m\to\infty}|x(m)|=\infty$」すなわち「$\forall R \in \mathbf{R}$ に対し，$\exists m_0 \in \mathbf{N}$, $\forall m \in \mathbf{N}$, $m_0 \leq m$ ならば $|x(m)|>R$」の否定を仮定して矛盾を導く．すなわち,「$\exists R \in \mathbf{R}, \forall m_0 \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}$, $m_0 \leq m$ かつ $|x(m)| \leq R$」を仮定して矛盾を導く．

$$A=\{x \in \mathbf{R}^m \mid |x| \leq R\}$$

とおく．仮定より，$x(m)$ の部分列 $x(m(p))$ で A の点列となるものが取れる．A は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であるから点列コンパクトである．したがって，点列 $x(m(p))$ のさらに部分列である点 $z \in A$ に収束するものが存在する．そうすると，ある $m,\ell \in \mathbf{N}, m<\ell$ があって，$d(x(m),z)<\frac{1}{2}, d(x(\ell),z)<\frac{1}{2}$ となる．したがって，$d(x(\ell),x(m)) \leq d(x(\ell),z)+d(z,x(m))<1$ となり，問題の前提に矛盾する．したがって，背理法により，$\lim_{m\to\infty}|x(m)|=\infty$ が示される．

補充問題２５． $(X,d),(Y,d')$ を距離空間，$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_m \supset \cdots$ を X の点列コンパクト集合 A_m からなる列とする．$f: X \to Y$ を連続写像とするとき，

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} f(A_m) = f\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right)$$

が成り立つことを示せ．

解説． 各 m について，$A_m \supset \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ であるから，$f(A_m) \supset f\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right)$ したがって，$\bigcap_{m=1}^{\infty} f(A_m) \supset f\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right)$ は明らか．

$\bigcap_{m=1}^{\infty} f(A_m) \subset f\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right)$ を示す．$y \in \bigcap_{m=1}^{\infty} f(A_m)$ とする．任意の m について，$y \in f(A_m)$ である．$x(m) \in A_m$ が存在して，$y=f(x(m))$ である．$\{x(m)\}_{m=1}^{\infty}$ は A_1 の点列であり，A_1 は点列コンパクトであるから，$x(m)$ の部分列 $x(m(p))$ と $x \in A_1$ が存在して，$x(m(p)) \to x (p \to \infty)$ となる．任意の p について，$x(m(p)) \in A_{m(p)}$ であり，$A_{m(p)}$ は点列コンパクトであるから,（ある部分列が，$A_{m(p)}$ のある点に収束するが，もともと $x(m(p))$ 自体が収束しているので）その極限 x は，$A_{m(p)}$ にも属する．したがって,（問題文で仮定されている包含関係から）$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ である．よって，$y=f(x) \in f\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right)$ となる．

補充問題２６． 次の問いに答えよ．

(1) 距離空間 (X,d) が**完備**であるという定義を述べよ．

(2) 距離空間 (X,d) の部分集合 A について，次の条件 (a) (b) は互いに同値であることを証明せよ．

(a) A は X の閉集合である．(つまり，$X \setminus A$ が X の開集合である．)

(b) A の点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の極限は A に属する．

(3) 完備な距離空間 (X,d) の部分距離空間 A が完備であるための必要十分条件は A が X の閉集合であることである．このことを証明せよ．

解説． (1) X 上の任意の Cauchy 列が収束する．

(2) (a) $\Rightarrow$ (b): A が X の閉集合とし，A の点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の極限を $x \in X$ とする．$x \in \overline{A}$ である．したがって，$x \in A$ である．

(b) $\Rightarrow$ (a): $x \in \overline{A}$ とする．任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，$B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ である．$a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ をとる．A の点列 a_n は x に収束する．なぜなら，$\varepsilon > 0$ に対して，$n_0 \in \mathbf{N}$ を $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$ ととれば，$n_0 \leq n$ のとき，$d(a_n, x) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$ が成り立つからである．したがって，(b) より，$x \in A$ である．よって A は X の閉集合となる．

(3) 完備 $\Rightarrow$ 閉集合：A の点列 a_n が $x \in X$ に収束するとする．a_n は A 上の Cauchy 列であり，A は完備だから，a_n は A の点に収束する．したがって，$x \in A$ である．よって，(2) から A は X の閉集合である．

閉集合 $\Rightarrow$ 完備：A 上の任意の Caucy 列 a_n をとる．a_n は X 上の Cauchy 列であり，X は完備だから，a_n は X のある点 $x \in X$ に収束する．(2) より，$x \in A$ である．よって，A は完備である．

補充問題２７．

$$X = \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) := \{(x_k)_{k=1}^{\infty} \mid x_k \in \mathbf{R}\ (k \in \mathbf{N}),\ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \ \text{が有限値として定まる}\ \}$$

とおき，X 上に距離を

$$d\left((x_k)_{k=1}^{\infty},\ (y_k)_{k=1}^{\infty}\right) := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2}$$

によって定義する．距離空間 (X,d) が完備であることを示せ．

解説． 講義中に解説する予定．

補充問題２８． X, Y を距離空間とし，X は点列コンパクトと仮定する．このとき，任意の連続写像 $f : X \to Y$ は**一様連続**であることを示せ．

解説． 講義中に解説する予定．