《 幾何学 A [多様体論] 講義プリント No.1 》

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２０１３年度後期，毎週金曜２コマ目)

【 幾何学 A について 】

● **講義のテーマ**：「ベクトル解析」や「曲線・曲面の幾何学」からの十分な動機付けのもとで，現代幾何学において基本的な “空間概念” である「多様体」について理解し，多様体上の微分積分学の基本を学ぶことで，いわば「**多様体という方法**」を習得することを目標とする．具体的には，多様体 (manifold) の定義，多様体の実例，多様体上の可微分関数 (differentiable function)，可微分写像 (differentiable mapping) と微分 (differential)，接ベクトル (tangent vector)，接ベクトル空間 (tangent vector space)，ベクトル場 (vector field)，余接ベクトル (cotangent vector)，余接ベクトル空間 (cotangent vector space)，微分形式 (differential form)，などに関する事柄を習得・理解し，これらの概念の具体例な使用法を身につける．

● **講義計画**：多様体論を「Advanced Vector Calculus and Differential Forms」と捉え，具体例と動機付けを十分知った上で，現代数学の理解とその応用に避けて通れない「多様体」という方法を深く学ぶための最善の計画を立てた．本講義の今回の特徴として，まず，$\mathbf{R}^n$ の部分多様体上のベクトル場や微分形式を扱った後に，それらの理解のもとで，抽象的な多様体やその上のベクトル場や微分形式を導入する点にある．具体的な授業計画は次の通り（変更の場合は事前に連絡予定）．

☆**第１回**：１０月４日．ガイダンス．ベクトル解析の話題から，多様体の考え方．
☆**第２回**：１０月１１日．$\mathbf{R}^n$ の部分多様体，Jacobi 行列，陰関数定理．
☆**第３回**：１０月１８日．$\mathbf{R}^n$ の部分多様体の上のベクトル場，計量．
☆**第４回**：１０月２５日．余（双対）ベクトル．$\mathbf{R}^n$ の微分多様体の上の微分形式．
☆**第５回**：１１月１日．多様体の定義と例，局所座標系，可微分写像．
☆**第６回**：１１月８日．多様体上の接ベクトル，接ベクトル空間，写像の微分．
☆**第７回**：１１月１５日．部分多様体，許容座標系，正則値定理，多様体の直積．小テスト（３０分）．
☆**第８回**：１１月２２日．多様体上のベクトル場，方向微分，交換子積（ブラケット）．
１１月２９日　公務出張のため休講．
☆**第９回**：１２月６日．ベクトル場の積分曲線，1-パラメータ変換群．
☆**第１０回**：１２月１３日．Riemann 計量の存在，１の分割．
☆**第１１回**：１２月２０日．多様体上の微分形式，外積と内部積，外微分．
２０１４年1月１０日　公務出張のため休講．
☆**第１２回**：1月１７日．　微分形式の積分．多様体の上の Stokes の定理（紹介）．
☆**第１３回**：1月２４日．期末テスト（８５分）
☆**第１４回**：1月２９日（水）．(学部専門・大学院科目　金曜日の授業を行う日）期末テストの返却，解説．
1月３１日　修士論文審査会のため休講．

● テキスト・教科書 ：とくに指定せず，講義プリントを配布し，それに従って講義を進める．
なお，講義指定図書として，
多様体 / 服部晶夫：岩波書店, 1989, ISBN:978-4000213264
多様体の基礎 / 松本幸夫：東京大学出版会, 1988, ISBN:4130621033
多様体 / 村上信吾：共立出版, 1989, ISBN:978-4320014190
多様体入門 / 松島与三：裳華房, 1965, ISBN:978-4785313050
スピバック / 多変数解析学：東京図書, 1972, ISBN:3341-2059-5160
ベクトル解析 / 岩堀長慶：裳華房, 1996, ISBN:978-4785313029
応用特異点論 / 泉屋周一・石川剛郎：共立出版, 1998, ISBN:4320015940
を挙げておくので，適宜参考にするとよい．

【 幾何学 A の評価方法 】

● 試験の点数（小テストと期末テスト），平常点（出席点），レポート点（数回を予定）を総合して評価する．

1 ベクトル解析の話題から．多様体の考え方．

【 ベクトル解析の定理 】
多様体は，なめらかな平面曲線や，空間曲線，空間曲面などを抽象化・一般化した概念である．これらの対象は，まず「ベクトル解析」で学ぶ．

Gauss の発散定理． $\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V (\mathrm{div}\boldsymbol{v}) dV.$

空間曲面の **Stokes の定理．** $\int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t} ds = \iint_S (\mathrm{rot}\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} dS.$

平面領域の **Green の定理．** $\int_C P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y)\, dxdy$

これらの定理には，$\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場や微分形式，$\mathbf{R}^3$ 上のベクトル場や微分形式が関わり，曲線や曲面上のベクトル場や微分形式が関わる．さらに，それらの積分（線積分，面積分，重責分）が関わる定理たちであり，自然現象を記述するために１９世紀後半において定式化された[1]．

これらの定理の詳しい説明は繰り返さないが，幾何の素養がないと理解が難しいのは確かである．たとえば，$\mathbf{R}^3$ 内の曲面 S の各点 a で，接平面 T_aS と法線 N_aS が定まり，$(\mathbf{R}^3 =) T_a\mathbf{R}^3 = T_aS \oplus N_aS$ （直和分解）が成立する．Gauss の発散定理の中の $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ は，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の法線方向の成分を表している．$\mathbf{R}^3$ 内の曲線 C の各点 a で，接線 T_aC と法平面 N_aC が定まり，$T_a\mathbf{R}^3 = T_aC \oplus N_aC$ （直和分解）が成立する．空間曲面に関する Stokes の定理の中の $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}$ は，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の接線方向の成分を表している．等々．

実は，これらの定理は，抽象的な境界付き向き付き多様体上の積分定理として１つの定理に述べられる：

Stokes の定理． $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$

多様体論を学んでいけば，このようなことが理解できるようになる．

曲線と曲面の幾何学でも，ベクトル場や微分形式が活躍した．接ベクトルや接線，接平面も習った．また，積分定理として次を学んだ：

Gauss-Bonnet の定理． $\iint_S K dS = 2\pi\chi(S)$

$\mathbf{R}^3$ 内の閉曲面 S の Gauss 曲率の面積分が，S の Euler 標数の 2π 倍に等しい（ただし，向き付けについて注意が必要）．この定理も，抽象的な向き付き２次元閉 Riemann 多様体（さらに偶数次元向き付き閉 Riemann 多様体）ついて定式化できて成立する．多様体論を学んでいけば理解できるようになる．

【 多様体の考え方 】
われわれのこの地球 (earth, globe) の地図を描くことを考えてみよう．地球全体をそのまま一枚の平面に描くことはできない．だから地球儀がある．地球全体を 1 枚の図にあらわすとしたら，どこかを切り離して描かなければならない．そこで，世界をいくつかの部分に分け，それを何枚もの地図にあらわし，地図帳 (アトラス，atlas) をつくる．より精密な情報が必要な場合は，地図帳にした方が便利だからである．一枚一枚の地図はチャート (chart) である．

「何枚かの局所的 (local) な地図で大域的 (global) な空間を表現する」というのが多様体 (manifold) の考え方である．

多様体という空間に住む，関数，ベクトル場や微分形式たちを解析するのも同様である．局所的に，各チャートにおいて解析され，その後にそれらが全体として統合・把握されるのである．

[1] ベクトル解析で標準的な概念として，$\mathbf{R}^3$ 上の関数 f の勾配 $\mathrm{grad} f = \nabla f$ というベクトル場，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の発散 $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}$ という関数（スカラー場），そしてベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の回転 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}$ というベクトル場がある．