《 幾何学 A [多様体論] 講義プリント No.1 》 (旧課程：幾何学３)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお，北海道大学理学研究院数学部門) (西暦２００９年度後期)

【 幾何学 A について 】

● **講義のテーマ**：「ベクトル解析」や「曲線・曲面の幾何」からの十分な動機付けのもとで，現代幾何学において基本的な “空間概念” である「多様体」について理解し，多様体上の微分積分学の基本を学び，いわば「**多様体という方法**」を習得することを目標とする．具体的には，この講義を通して，多様体 (manifold) の定義，多様体の実例，多様体上の可微分関数 (differentiable function)，可微分写像 (differentiable mapping) と微分 (differential)，接ベクトル (tangent vector)，接ベクトル空間 (tangent vector space)，ベクトル場 (vector field)，余接ベクトル (cotangent vector)，余接ベクトル空間 (cotangent vector space)，微分形式 (differential form)，などに関する事柄を習得・理解し，これらの概念の具体例な使用法を身につけよう．

● **講義計画**：多様体論を「Advanced Vector Calculus and Differential Forms」と捉え，具体例と動機付けを十分知った上で，現代数学の理解とその応用に避けて通れない「多様体」という方法を深く学ぶための最善の計画を立てている．本講義の今回の特徴的な試みとして，まず，$\mathbf{R}^n$ の部分多様体上のベクトル場や微分形式を扱った後に，それらの理解のもとで，抽象的な多様体やその上のベクトル場や微分形式を導入する点にある．
具体的な授業計画は次の通り（変更の場合は事前に連絡予定）．

☆**第１回**：１０月５日．ガイダンス．ベクトル解析，曲線と曲面の幾何の復習，多様体の考え方．
１０月１２日（体育の日），１０月１９日，１０月２６日は公務出張のため休講（予定）．
☆**第２回**：１１月２日．$\mathbf{R}^n$ の部分多様体，Jacobi 行列，陰関数定理．
☆**第３回**：１１月９日．$\mathbf{R}^n$ の部分多様体の上のベクトル場と微分形式．余（双対）ベクトル．計量．
１１月１６日は公務出張のため休講（予定），１１月２３日（勤労感謝の日）
☆**第４回**：１１月３０日．多様体の定義と例，局所座標系，可微分写像．
☆**第５回**：１２月７日．多様体上の接ベクトル，接ベクトル空間，写像の微分．
☆**第６回**：１２月１４日．多様体の中の部分多様体，許容座標系，正則値定理，多様体の直積．小テスト（３０分）．
☆**第７回**：１２月２１日．多様体上のベクトル場，方向微分，交換子積（ブラケット）．
☆**第８回**：２０１０年１月４日．ベクトル場の積分曲線，1-パラメータ変換群．
1月１１日（成人の日）
☆**第９回**：1月１８日．Riemann 計量の存在，１の分割．
☆**第１０回**：１月２５日．多様体上の微分形式，外積と内部積，外微分．
☆**第１１回**：２月１日．微分形式の積分．多様体の上の Stokes の定理（紹介）．
☆**第１２回**：２月８日　テスト（８５分）

● テキスト・教科書 ：とくに指定せず，講義プリントを配布し，それに従って講義を進める．
なお，講義指定図書として，
多様体 / 服部晶夫：岩波書店, 1989, ISBN:978-4000213264
多様体の基礎 / 松本幸夫：東京大学出版会, 1988, ISBN:4130621033
多様体 / 村上信吾：共立出版, 1989, ISBN:978-4320014190
多様体入門 / 松島与三：裳華房, 1965, ISBN:978-4785313050
スピバック / 多変数解析学：東京図書, 1972, ISBN:3341-2059-5160
ベクトル解析 / 岩堀長慶：裳華房, 1996, ISBN:978-4785313029
応用特異点論 / 泉屋周一・石川剛郎：共立出版, 1998, ISBN:4320015940
を挙げておくので，適宜参考にするとよい．

【 幾何学 A の評価方法 】

● 試験の点数（小テストと期末テスト)，平常点（出席点)，レポート点（数回を予定）を総合して評価する．

1　ベクトル解析，曲線と曲面の幾何，多様体の考え方

【 ベクトル解析の定理 】
多様体は，なめらかな平面曲線や，空間曲線，空間曲面などを抽象化・一般化した概念である．これらの対象は，まず「ベクトル解析」で学ぶ．

Gauss の発散定理. $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iiint_V (\mathrm{div}\boldsymbol{v})dV.$

空間曲面の **Stokes の定理.** $\displaystyle\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}ds = \iint_S (\mathrm{rot}\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}dS.$

平面領域の **Green の定理.** $\displaystyle\int_C Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dxdy$

これらの定理には，$\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場や微分形式，$\mathbf{R}^3$ 上のベクトル場や微分形式が関わり，曲線や曲面上のベクトル場や微分形式が関わる．さらに，それらの積分（線積分，面積分，重責分）が関わる定理たちであり，自然現象を記述するために１９世紀後半において定式化された[1]．

これらの定理の詳しい説明は繰り返さないが，幾何の素養がないと理解が難しいのは確かである．たとえば，$\mathbf{R}^3$ 内の曲面 S の各点 a で，接平面 T_aS と法線 N_aS が定まり，$(\mathbf{R}^3 =)T_a\mathbf{R}^3 = T_aS \oplus N_aS$ （直和分解）が成立する．Gauss の発散定理の中の $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ は，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の法線方向の成分を表している．$\mathbf{R}^3$ 内の曲線 C の各点 a で，接線 T_aC と法平面 N_aC が定まり，$T_a\mathbf{R}^3 = T_aC \oplus N_aC$ （直和分解）が成立する．空間曲面に関する Stokes の定理の中の $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}$ は，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の接線方向の成分を表している．等々．

実は，これらの定理は，抽象的な境界付き向き付き多様体上の積分定理として１つの定理に述べられる：

Stokes の定理. $\displaystyle\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$

多様体論を学んでいけば，このようなことが理解できるようになる．

曲線と曲面の幾何学でも，ベクトル場や微分形式が活躍した．接ベクトルや接線，接平面も習った．また，積分定理として次を学んだ：

Gauss-Bonnet の定理. $\displaystyle\iint_S KdS = 2\pi\chi(S)$

$\mathbf{R}^3$ 内の閉曲面 S の Gauss 曲率の面積分が，S の Euler 標数の 2π 倍に等しい（ただし，向き付けについて注意が必要）．この定理も，抽象的な向き付き２次元閉 Riemann 多様体（さらに偶数次元向き付き閉 Riemann 多様体）ついて定式化できて成立する．多様体論を学んでいけば理解できるようになる．

【 多様体の考え方 】
われわれのこの地球 (earth, globe) の地図を描くことを考えてみよう．地球全体をそのまま一枚の平面に描くことはできない．だから地球儀がある．地球全体を１枚の図にあらわすとしたら，どこかを切り離して描かなければならない．そこで，世界をいくつかの部分に分け，それを何枚もの地図にあらわし，地図帳 (アトラス，atlas) をつくる．より精密な情報が必要な場合は，地図帳にした方が便利だからである．一枚一枚の地図はチャート (chart) である．

「何枚かの局所的 (local) な地図で大域的 (global) な空間を表現する」というのが多様体 (manifold) の考え方である．

多様体という空間に住む，関数，ベクトル場や微分形式たちを解析するのも同様である．局所的に，各チャートにおいて解析され，その後にそれらが全体として統合・把握されるのである．

[1]ベクトル解析で標準的な概念として，$\mathbf{R}^3$ 上の関数 f の勾配 $\mathrm{grad}f = \nabla f$ というベクトル場，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の発散 $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{v}$ という関数（スカラー場），そしてベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の回転 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{v}$ というベクトル場がある．

《 幾何学 A [多様体論] 講義プリント No. ２ 》 (旧課程：幾何学３)

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお) (西暦２００９年度後期)

2　多変数の微分解析と R^n の部分多様体

ベクトル解析では，多変数の微分積分学で学ぶ逆関数定理や陰関数定理を自在に使いこなす必要がある．それらを発展的に復習する．さらに，$\mathbf{R}^n$ の部分多様体の定義を与え，その判定法を紹介する．

【 n 次元 Euclid 空間の再確認 】 実数全体の空間を $\mathbf{R}$ で表わす．n 個の $\mathbf{R}$ の直積集合

$$\mathbf{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i は実数, 1 \leq i \leq n\}$$

を n **次元数空間**あるいは n **次元デカルト空間** (Cartesian space) と呼ぶ $(n = 1, 2, \ldots)$．$\mathbf{R}^n$ に距離

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \cdots + (x_n - x_n')^2}$$

を入れる．ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ である．このとき $\mathbf{R}^n$ を n **次元 Euclid 空間**とよぶ．

【$\mathbf{R}^n$ の位相 】 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 U が $\mathbf{R}^n$ **の開集合**とは，U の各点 $\boldsymbol{a}$ に対し，正の実数 $\varepsilon > 0$ がとれて，$\boldsymbol{a}$ の ε-近傍が U に含まれるときに言う．

【 C^r 写像 】 $U \subset \mathbf{R}^n$ を開集合とするとき，写像 $f : U \to \mathbf{R}^p$ は，関数の組

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, y_p = f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

で与えられる．このとき $f = (f_1, \ldots, f_p)$ と表す．各 f_j, $1 \leq j \leq p$ が U の各点で C^r 級（U 上で r 階までのすべての偏導関数が存在し，連続）のとき，f を C^r **写像**と言う（$r = 1, 2, \ldots, \infty$）．また，連続な写像を C^0 **写像**とよぶ．

【Jacobi 行列 】 $f_1, \ldots, f_p$ の 1 階偏導関数を成分とする $p \times n$ 型行列

$$J_f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を変数とする行列値関数である．写像 f の **Jacobi 行列**と呼ぶ．Jacobi 行列は，与えられた C^r 写像の線形写像による "1 次近似"，言い換えれば**線形化**であり，その写像の局所的ふるまいの重要な情報を与える．とくに線形写像 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ の Jacobi 行列は，f の（標準基底に関する）表現行列そのものに他ならない．

補題 2.1 (**合成写像の Jacobi 行列は Jacobi 行列の積である**) 点 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ の開近傍上の C^r 写像 $f : U \to \mathbf{R}^p$ と点 $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^p$ の開近傍 V 上の C^r 写像 $g : V \to \mathbf{R}^q$ について，合成写像 $g \circ f$ は $\boldsymbol{x}$ の開近傍上で C^r 級であって，

$$J_{g \circ f}(\boldsymbol{x}) = J_g(f(\boldsymbol{x}))\, J_f(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．

【正則点，しずめ込み，臨界点 】 $f : U(\subset \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^p$ を C^r 写像とする．点 $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ が f の**正則点** (regular point) とは，ヤコビ行列 $J_f(\boldsymbol{a})$ の階数が p に等しいときにいう． このとき，f は $\boldsymbol{a}$ で**しずめ込み** (submersion) であるという．またそれ以外の場合，すなわち，$J_f(\boldsymbol{a})$ の階数が p より真に小さいとき点 $\boldsymbol{a}$ は f の**臨界点**であるという．$n < p$ の場合はすべての点が臨界点となることに注意する．

【微分同相写像 】 $\mathbf{R}^n$ の開集合 V から $\mathbf{R}^n$ の開集合 W への写像 $\varphi : V \to W$ が，C^r 級で，全単射で，かつ，C^r 級の逆写像をもつとき，C^r **微分同相** (diffeomorphism) であると言う．条件は，φ が C^r 写像であり，C^r 写像 $g : W \to V$ が存在して，$g \circ f = \mathrm{id}_V : V \to V$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_W : W \to W$ が成り立つことである．

定理 2.2 （**逆写像定理**）U を $\mathbf{R}^n$ における開集合とし，$f : U \to \mathbf{R}^n$ を C^r 写像とする．このとき，f の各正則点 $\boldsymbol{a}$ について，f は $\boldsymbol{a}$ のある開近傍 $V(\subset U)$ から $f(\boldsymbol{a})$ のある開近傍 W への C^r 微分同相写像である．

【**ヤコビアン** 】$n=p$ のとき，Jacobi 行列は n 次正方行列になるが，その行列式

$$\det(J_f)=|J_f|=\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

を f の**ヤコビアン** (Jacobian) と呼ぶ．$n=p$ の場合，$\boldsymbol{a}$ が f の正則点である条件は，そのヤコビアンが零でないことである．

f が C^r 写像のとき，J_f の各成分は C^{r-1} 関数であるから，f のヤコビアンは C^{r-1} 関数である．$r=\infty$ のときは，$r-1=\infty$ とみなす．

逆写像定理から，次のことがわかる．

系 2.3 （**陰関数定理，陰写像定理**）U を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし，$f:U\to\mathbf{R}^p$ を C^r 写像とする．$\boldsymbol{a}\in U$ が正則点ならば，$\boldsymbol{a}$ の開近傍 $V(\subset U)$ から $\mathbf{0}$ の開近傍 W への C^r 微分同相写像 $\sigma:V\to W$, $\sigma(\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$ があって，$f\circ\sigma^{-1}$ が，

$$f\circ\sigma^{-1}(x'_1,\ldots,x'_{n-p},x'_{n-p+1},\ldots,x'_n)=(x'_{n-p+1},\ldots,x'_n)+f(\boldsymbol{a}),\ (\boldsymbol{x}'=(x'_1,\ldots,x'_n)\in W),$$

と表される．

証明．$n\geq p$ に注意して，$n=m+p$ とおく．f の Jacobi 行列 J_f の階数が p であるから，必要があれば，$\mathbf{R}^n$ の座標の番号を入れ換えて， J_f の一番最後の p 次小行列

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{m+p}}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{m+1}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{m+p}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_{m+1}} & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_{m+p}}\end{pmatrix}$$

が，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で正則行列であるとしてよい．このとき，

$$\sigma(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+p})=(x_1,\ldots,x_m,f(\boldsymbol{x}))-(a_1,\ldots,a_m,f(\boldsymbol{a}))$$

とおくと，$\sigma(\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$ であり，また，Jacobi 行列 $J_\sigma(\boldsymbol{a})$ が n 次正則行列であることはすぐにわかる．よって逆写像定理から， σ は，$\boldsymbol{a}$ のある開近傍 $V\subset U$ から，$\mathbf{0}$ のある開近傍 W への C^r 微分同相写像である．いま，$\boldsymbol{x}'\in W$ に対し，$\boldsymbol{x}=\sigma^{-1}(\boldsymbol{x}')$ とおくと，$\sigma(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'$ であり，σ の定義から

$$(x_1,\ldots,x_m,f(\boldsymbol{x}))-(a_1,\ldots,a_m,f(\boldsymbol{a}))=(x'_1,\ldots,x'_m,x'_{m+1},\ldots,x'_n)$$

がわかるから，とくに，$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})=(x'_{m+1},\ldots,x'_n)$ であり，$f\circ\sigma^{-1}(\boldsymbol{x}')=(x'_{m+1},\ldots,x'_n)+f(\boldsymbol{a})$ が成り立つ．□

【**陰関数定理の説明** 】いま $\pi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^p$ を

$$\pi(x_1,\ldots,x_{n-p},x_{n-p+1},\ldots,x_n)=(x_{n-p+1},\ldots,x_n)$$

で定義される写像とする．陰関数定理の結論は

$$f\circ\sigma^{-1}=t_{f(\boldsymbol{a})}\circ\pi|_W:W\to\mathbf{R}^p$$

と表される．ここで，$t_{f(\boldsymbol{a})}$ は $f(\boldsymbol{a})$ だけの平行移動である．図式で書くと

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\pi|_W} & \mathbf{R}^p\\ {\scriptstyle \sigma^{-1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle t_{f(a)}}\\ V & \xrightarrow[f|_V]{} & \mathbf{R}^p\end{array}$$

が可換，すなわち W から $\mathbf{R}^p$ への２つのルートが同じ写像を与えることになる．微分同相 σ は，局所的な座標変換と考えられる．上の図式の可換性は，座標のとりかたを変えれば，f は局所的には簡単な写像 (いまの場合は射影) で表わされることを示している．こうして，f の正則点のまわりの局所的ふるまいは完全にわかる．

点 $\boldsymbol{a}$ を通る f の "等高線" すなわち $f(\boldsymbol{a})$ の f による逆像 $M=f^{-1}(f(\boldsymbol{a}))\subset U$ について見ると，そのうちの V に含まれる部分は，σ によって

$$\{\boldsymbol{x}\in W \mid x_{n-p+1}=\cdots=x_n=0\}$$

に写る．$x_1,\ldots,x_{n-p}$ をあらためて $\mathbf{R}^{n-p}$ の座標と見なせば，$\sigma(M\cap V)$ は $\mathbf{R}^{n-p}$ の開集合となる．こうして，M は $\boldsymbol{a}$ の近くで，$m=n-p$ 個のパラメータ（媒介変数，助変数）で表わされるのである．

【 $\mathbf{R}^n$ の部分多様体 】 S を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とする．S が $\mathbf{R}^n$ の s 次元 C^r **部分多様体**とは，各点 $\boldsymbol{a}\in S$ について，$\boldsymbol{a}$ の $\mathbf{R}^n$ における開近傍 U と，C^r 微分同相写像 $\sigma: U\to\sigma(U)\subset\mathbf{R}^n$ があって，

$$\sigma(U\cap S)=\{\boldsymbol{x}\in\sigma(U)\mid x_{s+1}=0,\ldots,x_n=0\}\subset\mathbf{R}^s\times\{0\}$$

であるときにいう．つまり，S の各点の近くで局所的に上手に座標系を選んで，$\mathbf{R}^n$ の中の "まっすぐな" $\mathbf{R}^s$ と見なすことが可能であるという場合である．なお，上のような σ を $\boldsymbol{a}$ のまわりの C^r **許容座標系**とよぶ．
$\mathbf{R}^n$ の部分多様体は，非常に重要な幾何学的対象であり，この対象に基づいた考察から，一般の多様体論が展開される．

例 2.4 「ベクトル解析」や「曲線と曲面の幾何」で学んだ空間曲面 $S\subset\mathbf{R}^3$ は $\mathbf{R}^3$ の 2 次元部分多様体である．空間曲線 $C\subset\mathbf{R}^3$ は $\mathbf{R}^3$ の 1 次元部分多様体である．1 点からなる集合 $\{\boldsymbol{a}\}\subset\mathbf{R}^3$ は $\mathbf{R}^3$ の 0 次元部分多様体，$\mathbf{R}^3$ 自身やその開集合は $\mathbf{R}^3$ の 3 次元部分多様体である．

【 正則値 】 C^r 写像 $f:U(\subset\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^p$ について，$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^p$ が f の**正則値** (regular value) とは，$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}$ となるような すべての 点 $\boldsymbol{x}\in U$ が f の正則点のときにいう．また，$\boldsymbol{b}'\in\mathbf{R}^p$ が f の**臨界値** (critical value) とは，$f(\boldsymbol{a}')=\boldsymbol{b}'$ となるような臨界点 $\boldsymbol{a}'\in U$ が 存在する ときにいう．

定理 2.5 (**正則値定理**). $f:U\to\mathbf{R}^p$ を $\mathbf{R}^n$ の開集合上で定義された C^r 写像とし，$n\geq p$ とする．$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^p$ が f の 正則値 のとき，その逆像

$$f^{-1}(\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}\in U\mid f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}\}$$

は $\mathbf{R}^n$ の $n-p$ 次元 C^r 部分多様体である.（空集合の場合も含んでいる）.

証明. $\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^p$ を f の正則値とし，$\boldsymbol{a}\in f^{-1}(\boldsymbol{b})$ とする．正則値の定義により，$\boldsymbol{a}$ は f の正則点であり，f のヤコビ行列 $J_f(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ での階数は p である．陰関数定理より，$\boldsymbol{a}$ の開近傍 $V(\subset U)$ から $\mathbf{0}$ の開近傍 $W\subset\mathbf{R}^n$ への C^r 微分同相 $\sigma:V\to W,\ \sigma(\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$ があって，すべての $\boldsymbol{x}'=(x_1',\ldots,x_n')\in W$ に対し，

$$f\circ\sigma^{-1}(x_1,\ldots,x_{n-p},x_{n-p+1},\ldots,x_n)=(x_{n-p+1},\ldots,x_n)+f(\boldsymbol{a})$$

が成り立つ．$\boldsymbol{x}\in\sigma(V)=W$ に対して,「$\boldsymbol{x}\in\sigma(V\cap f^{-1}(\boldsymbol{b}))\Leftrightarrow\sigma^{-1}(\boldsymbol{x})\in V\cap f^{-1}(\boldsymbol{b})\Leftrightarrow f\circ\sigma^{-1}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_{n-p+1}=0,\ldots,x_n=0$」となるから，$\sigma:V\to W\subset\mathbf{R}^n$ は $f^{-1}(y)$ に関する $\boldsymbol{a}$ のまわりの C^r 許容座標系である．$f^{-1}(\boldsymbol{b})$ の各点 $\boldsymbol{a}$ で成立しているから，$f^{-1}(\boldsymbol{b})$ が $\mathbf{R}^n$ の $n-p$ 次元 C^r 部分多様体であることが証明された． □

【正則値定理の活用例】 $g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ を

$$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

で定義する．g は C^∞ 写像である．g のヤコビ行列は $J_g=(2x_1,2x_2,2x_3)$ であるから，原点 $\mathbf{0}\in\mathbf{R}^3$ 以外で g はしずめ込みである．$f(\mathbf{0})=0$ だから，$\mathbf{R}$ の 0 以外は f の正則値である．したがって，定理 2.5 により，$g^{-1}(1)=S^2$ は $\mathbf{R}^3$ の 2 次元 C^∞ 部分多様体である．

3 $\mathbf{R}^n$ の部分多様体の上のベクトル場と微分形式

【 $\mathbf{R}^n$ の部分多様体上の接ベクトル 】 $S\subset\mathbf{R}^n$ を $\mathbf{R}^n$ の s 次元部分多様体とする．$\boldsymbol{a}$ における（$\boldsymbol{a}$ から "発する"）ベクトル全体 $T_{\boldsymbol{a}}\mathbf{R}^n\cong\mathbf{R}^n$ は n 次元のベクトル空間となる．その中で S に $\boldsymbol{a}$ で "接する" ベクトル全体 $T_{\boldsymbol{a}}S\subset T_{\boldsymbol{a}}\mathbf{R}^n\cong\mathbf{R}^n$ を定義したい．いま，S がしずめ込み $f=(f_{s+1},\ldots,f_n):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n-s}$ について，$f_{s+1}(\boldsymbol{x})=0,\ldots f_n(\boldsymbol{x})=0$ によって定まっているとすると，

$$T_{\boldsymbol{a}}S=\left\{\boldsymbol{v}=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbf{R}^n\ \middle|\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})v_1+\cdots+\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})v_n=0,\ s+1\leq j\leq n\right\}$$

である．つまり，f の Jacobi 行列 ($(n-s)\times n$ 行列) から決まる線形写像 $J_f:\mathbf{R}^n(=T_{\boldsymbol{a}}\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^{n-s}(=T_{\mathbf{0}}\mathbf{R}^{n-s})$ の核 (kernel) が $T_{\boldsymbol{a}}S$ である．特に，$T_{\boldsymbol{a}}S$ は $\mathbf{R}^n$ の s 次元部分ベクトル空間である．

【接ベクトルを内在的に捉える方法】 ところで，抽象的な多様体論と関係してくるのだが，$\mathbf{R}^n$ の部分多様体 S の「接ベクトル」というものを，S に属さない部分も関係してしまう S の定義式 $f=(f_{s+1},\ldots,f_n)$ とか,「法線ベクトル」

とかを用いないで，$\mathbf{R}^n$ への「埋め込まれ方」に依らないで，多様体 S だけが関わるようなやり方でも定義できないだろうか[2]？

多様体 S について接ベクトルを定義するやり方には，少なくとも２通りある．１つは，点が S 上を（S 上に拘束されながら）動くときの「速度ベクトル」として捉える方法（運動学的方法）．もう１つは，S 上の関数に作用する「１階同次偏微分作用素」として捉える方法（解析学的方法）である．後で，詳しく説明する．

【 $\mathbf{R}^n$ の部分多様体上のベクトル場 】ベクトル場 (vector field) は空間の各点にベクトルを指定する．関数（スカラー場）が空間の各点に数を指定するように．ちなみに「テンソル場」は空間の各点に「テンソル」を指定する．それはともかく，$\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ は，各点 $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ にベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}) \in T_{\boldsymbol{a}}\mathbf{R}^n \cong \mathbf{R}^n$ を指定する．ベクトルを運動学的に捉えると，ベクトル場は，空間上の「流れ」(flow) と密接に関係する．$\mathbf{R}^3$ 上に流体（たとえば，水の流れ，大気の流れ）があるとする．ある時刻 $t = t_0$ における各点の流れの速度ベクトルを指定すれば，ベクトル場が得られる．逆に（C^1 級，あるいは Lipschitz 連続な）ベクトル場が与えられれば，それを速度ベクトル場とする C^1 級の流れが存在する（ベクトル場の積分，常微分方程式の解の存在と一意性から従う）[3]．

部分多様体 $S \subset \mathbf{R}^n$ に対してもベクトル場という概念が定義される．$\boldsymbol{x} \in S \mapsto \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in T_{\boldsymbol{x}}\mathbf{R}^n$ である．特に，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ が S に接するとき，つまり，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \in T_{\boldsymbol{x}}S$ のとき，S 上の**接ベクトル場** (tangent vector field) と呼ぶ．(誤解が生じないときは，S 上のベクトル場，と言うときもある）．S 上の接ベクトル場には，S 上の流れが対応する．

【 ベクトル場の微分可能性 】$S \subset \mathbf{R}^n$ を s 次元 C^r 部分多様体とし，$\boldsymbol{v}$ を S 上のベクトル場とするとき，$\boldsymbol{v}$ が C^r 級であるとか，C^r 級でないとかは，多様体の考え方に基づき，S を局所的に s 個のパラメータ（局所座標）$(x'_1, \dots, x'_s)$ で表し[4]，そのパラメータに関して，$\boldsymbol{v}$ が C^r 級かどうかで考える．後で,「基底」(basis) あるいは「枠」(frame) という概念を使って，より明確に述べる．

【 双対ベクトル空間 】V を n 次元ベクトル空間とするとき，その**双対ベクトル空間** (dual vector space) V^* が定義される：$V^* = \{\alpha \mid \alpha : V \to \mathbf{R}$ 線形写像 $\}$. とおく．各 $\alpha \in V^*$ は線形写像だから，$u, v \in V, c \in \mathbf{R}$ について，$\alpha(u+v) = \alpha(u) + \alpha(v), \quad \alpha(\lambda u) = \lambda \cdot \alpha(u)$ が成り立つ．V^* は，$\alpha, \beta \in V^*, c \in \mathbf{R}$ に対して，

$$(\alpha+\beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v), \quad (c\alpha)(v) = c \cdot \alpha(v), \quad (v \in V),$$

により，和とスカラー倍が定義できて，ベクトル空間となる．V^* をベクトル空間 V の**双対ベクトル空間** (dual vector space) あるいは単に**双対空間** (dual space) とよぶ．双対は「そうつい」と読む．$\alpha \in V^*, v \in V$ について，$\alpha(v) \in \mathbf{R}$ を $\langle \alpha, v \rangle$ と表すことがある．

【$(\mathbf{R}^n)^*$ の説明】$V = \mathbf{R}^n$ を n 次 "列ベクトル" の空間と見なし，$V^* = (\mathbf{R}^n)^*$ を n 次 "行ベクトル" の空間と見なせば，$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in V^*, v = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ について，

$$\alpha(v) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_2 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

となる．双対ベクトルはベクトルの線形評価である．

【 双対基底 】$u_1, \dots, u_n$ が n 次元ベクトル空間 V の基底であるとき，$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$ を，$\alpha_i(u_j) = \delta_{ij}, (1 \leq i, j \leq n)$, δ_{ij} は Kronecker のデルタ，で定める．$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は V^* の基底になることがわかるので，これを $u_1, \dots, u_n$ に対する**双対基底** (dual basis) とよぶ．たとえば，$V = \mathbf{R}^2$ の基底 $u_1 = {}^t(1,1), u_2 = {}^t(0,1)$ の双対基底は $\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (-1,1)$ で与えられる．

【 双対線形写像 】$H : V \to W$ をベクトル空間 V からベクトル空間 W への線形写像とする．$\beta \in W^*$ について，$(H^*(\beta))(v) = \beta(H(v)) \in \mathbf{R}$, $(v \in V)$ により，$H^*(\beta) \in V^*$ が定まる．こうして，写像 $H^* : W^* \to V^*$ が定まるが，これは線形写像となる．H^* を H の**双対線形写像** (dual linear mapping) とよぶ．
$i : V \to W$ が単射ならば，$i^* : W^* \to V^*$ は全射である．$p : V \to W$ が全射ならば，$p^* : W^* \to V^*$ は単射である．

【 $\mathbf{R}^n$ の部分多様体上の余接ベクトル 】$S \subset \mathbf{R}^n$ を s 次元 C^r 部分多様体とする．$\boldsymbol{a} \in S$ に対して，接ベクトル空間 $T_{\boldsymbol{a}}S$ の双対ベクトル空間 $(T_{\boldsymbol{a}}S)^*$ を $T^*_{\boldsymbol{a}}S$ とも書き，$\boldsymbol{a}$ における S の**余接ベクトル空間** (cotangent vector space) あるいは単に**余接空間** (cotangent space) とよぶ．余接ベクトル空間の要素を**余接ベクトル** (cotangent vector) とよぶ．接ベクトルは見えるが，余接ベクトルは見えない．

【 $\mathbf{R}^n$ の部分多様体上の微分形式 】$\mathbf{R}^n$ 上の**余接ベクトル場** (cotangent vector field) あるいは**１次微分形式** (differential form of degree one) とは，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mapsto \alpha(\boldsymbol{x}) \in T^*_{\boldsymbol{x}}\mathbf{R}^n \cong (\mathbf{R}^n)^*$ という対応である．同様に，C^r 部分多様体 $S \subset \mathbf{R}^n$ に対しても，S 上の C^r 余接ベクトル場 $\boldsymbol{x} \in S \mapsto \alpha(\boldsymbol{x}) \in T^*_{\boldsymbol{x}}S = (T^S_{\boldsymbol{x}})^*$ という概念が考えられる．$\mathbf{R}^n$ 上の接ベクトルを部分多様体 $S \in \mathbf{R}^n$ に制限しても S 上の接ベクトルになるとは限らないが，$\mathbf{R}^n$ 上の余接ベクトルを部分多様体 $S \in \mathbf{R}^n$ に制限すると S 上の余接ベクトルになる．包含写像 $i : T_{\boldsymbol{a}}S \to T_{\boldsymbol{a}}\mathbf{R}^n$ の双対線形写像 $i^* : T^*_{\boldsymbol{a}}\mathbf{R}^n \to T^*_{\boldsymbol{a}}S$ があるからだ．

【 内積 】ベクトル空間の内積は，線形代数で学んでいる．復習する．
特に，V に内積が与えられれば，誘導されるベクトル空間の同型写像 $V \cong V^*$ が存在することは重要である．

---

[2]たとえば，Klein の壷は，$\mathbf{R}^3$ に埋め込めないが，$\mathbf{R}^4$ には埋め込める．しかし，埋め込めるとか埋め込めない，とかを気にしないで，自由に直接に Klein の壷を理解できた方がより良いだろう．また，宇宙空間自体の「曲り具合」を多様体論で論じる場合など，宇宙の外側を設定するのは無理だろう．

[3]一般に，時間にも依存したベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}, t)$ に対して流れが対応する．

[4]$\mathbf{R}^n$ の標準座標とは異なるので区別のためにプライム (′) を付けている．