

【 幾何学 3 : 曲線と曲面の幾何学 】

2025年度前期

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

● 授業計画

1. 平面曲線
2. 平面曲線の性質
3. 空間曲線
4. 曲面とは何か
5. 第一基本形式
6. 第二基本形式
7. 主方向と漸近方向
8. 測地線とガウス・ボンネの定理
9. 曲面の位相
10. 微分形式
11. ガウス・ボンネの定理 (多様体の場合)
12. 期末テスト
13. 幾何学の世界

● 教科書は使用しない.

参考書

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)」裳華房 (1995).

梅原雅顕, 山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」裳華房 (2015).

宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」岩波書店 (2019).

9. 曲面の位相

● 集合と位相の復習

定義. 集合 X の各要素 x に対して集合 Y のある要素をそれぞれ対応させる規則 $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への写像 (mapping, map, function) という. X を f の定義域 (domain, source), Y を f の値域 (range, target) とよぶ. $x \in X$ に対応して決まる $y \in Y$ を $f(x)$ と表す. 写像を $y = f(x)$ と表現するときもある.

A の異なる 2 要素に B の異なる 2 要素が対応するとき, f を 1 対 1 写像 (単射) (injection) という. また, B のどの要素 b に対して A のある要素 a が対応している, つまり $b = f(a)$, のとき f を上への写像 (全射) (surjection) という. 単射であり全射でもある写像を 1 対 1 上への写像 (全単射) (bijection) という. 値域 Y が定義域 X と同じとき, つまり, $f: X \rightarrow X$ のタイプの写像を変換 (transformation) とよぶときもある.

定義. 位相空間 (topological space) とは, 集合 X に X の部分集合からなるある集合族 $\mathcal{U} = \{U\}$ が指定され, 次の条件 (1) かつ (2) かつ (3) をみたすことである:

条件

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$,
- (2) $U, V \in \mathcal{U}$ なら必ず $U \cap V \in \mathcal{U}$,
- (3) $U_\lambda \in \mathcal{U}, \lambda \in \Lambda$ なら必ず $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}$.

このとき, $\mathcal{U}$ に属する U を位相空間 X の開集合 (open set), $\mathcal{U}$ を位相空間 X の開集合系 (system of open sets) とよぶ.

注意. 位相空間を集合とその上の開集合系のペア $(X, \mathcal{U})$ で表すとより厳密になるが, 通常は横着して, 単に X と書くことも多い. その場合は, 明示されていないが何か開集合系が与えられているんだ, と思えばよい. □

注意. 上の Λ はいわゆる“添字集合”である. 集合につけるラベルやシールの束だと思えばよい. □

補題. X の部分集合 A が X の開集合である必要十分条件は, A の各点 x に対し, $x \in U \subseteq A$ をみたす $U \in \mathcal{U}$ が存在することである.

証明. $(\Rightarrow)$ A を X の開集合とする. このとき, $A \in \mathcal{U}$ なので, A の各点 x に対して, U として A を選べばよい.

$(\Leftarrow)$ A の各点 x に対し, $x \in U \subseteq A$ をみたす $U \in \mathcal{U}$ が存在するので, その U を, わかりやすく印をつけて, U_x と書くと, $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x \subseteq A$ が成り立つので, 条件 (3) より, $A = \bigcup_{x \in A} U_x \in \mathcal{U}$ となり, A は X の開集合である. $\square$

定義. 位相空間 X の部分集合 A に対して,

$$\mathcal{U}_A := \{U \cap A \mid U \text{ は } X \text{ の開集合} \} (= \{U \cap A \mid U \in \mathcal{U}\})$$

と定めると A も位相空間となる. このように定める A の位相を相対位相 (relative topology) という.

定義. 位相空間 X の部分集合 N が点 $x \in X$ の近傍 (neighborhood) とは, $x \in U \subseteq N$ となる X の開集合 U が存在することである. N が開集合のとき, 開近傍 (open neighborhood) という.

例. 距離空間 (X, d) は自然に位相空間と考えられる. 実際, X の部分集合 U に対し, 「 U が X の開集合 $\iff$ 任意 $a \in U$ に対して, $\varepsilon > 0$ が存在して, a の ε -近傍 $U_\varepsilon(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$ が U に含まれる.」により定めることができる.

たとえば, $\mathbf{R}^n$ のユークリッド距離 (Euclidean distance)

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

について, $\mathbf{R}^n$ にユークリッド位相 (“通常の位相”) が導入される.

□

定義. 位相空間 X, Y の間の写像 $f : X \rightarrow Y$ が連続 (continuous) であるとは, Y の任意の開集合 V の逆像 (inverse image) $f^{-1}(V) := \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ が X の開集合であるときにいう.

定義. 2 つの位相空間 X と Y が同相 (homeomorphic) であるとは, X から Y への連続写像 $f : X \rightarrow Y$ と, Y から X への連続写像 $g : Y \rightarrow X$ で, $g \circ f$ が X の恒等写像であり, $f \circ g$ が Y の恒等写像となるものが存在することをいう.

例. 平面上の円と三角形は, (平面 $\mathbf{R}^2$ の相対位相について, 内部を含めた場合でも, 境界部だけで考えても, いずれにしても) 同相である.

余談. 位相空間の「同相」という同値関係による分類の他に, より粗い「ホモトピー同値」という同値関係による分類もある. たとえば, 円板 (内部も含めた円) と 1 点は同相でないが, ホモトピー同値である. 位相空間の「基本群」や「ホモトピー群」の同型

類は, ホモトピー同値で不変である.

● 曲面とは

いわゆる「2次元位相多様体」としての「曲面」を定義する.

定義. 曲面 S とは, ハウスドルフ位相空間であって, S の各点が $\mathbf{R}^2$ の開集合と同相な開近傍をもつときにいう. コンパクトな曲面を閉曲面 (closed surface) という.

曲面 S に対して, S の開被覆 $U_\lambda, (\lambda \in \Lambda)$ つまり, 各 U_λ は M の開集合で, $S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となるものと, 各 U_λ と $\mathbf{R}^2$ の開集合 V_λ との間の同相写像 $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda (\subseteq \mathbf{R}^2)$ となるものがとることができる. このとき, 組 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ をチャート (= 地図, あるいは座標近傍), $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ をアトラス (= 地図帳, あるいは座標近傍系) とよぶ. U_λ の各点は, 同相写像 φ_λ を通して, $V_\lambda \subseteq \mathbf{R}^2$ の点と対応するので, その x 座標, y 座標で位置情報がわかる. $V_\lambda \subseteq \mathbf{R}^2$ の x 座標と y 座標を局所座標系と呼ぶ.

例. 球面, トーラス, 射影平面, クラインの壺, は曲面の例である. (図は授業の中で紹介する.)

定義. 曲面 S が向き付け可能 (orientable) とは, S 上にアトラス (座標近傍系) $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ で, 次の条件をみたすものを選ぶことができるときに言う:
 $\lambda, \lambda' \in \Lambda, U_\lambda \cap U_{\lambda'} \neq \emptyset$ のとき, 貼り合わせの写像

$$\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_{\lambda'}) \rightarrow \varphi_{\lambda'}(U_\lambda \cap U_{\lambda'})$$

が $\mathbf{R}^2$ の開集合から $\mathbf{R}^2$ の開集合への “向きを保つ” 同相写像である.

曲面 S が向き付け不可能 (non-orientable) とは, 向き付け可能でないときに言う.

● 閉曲面の位相的分類と種数

定義. (連結和) 閉曲面 S と S' について, S の円板と同相な部分集合 D と S' の円板と同相な部分集合 D' に対し, S から D の内部を取り除いた残り, と, S' から D' の内部を取り除いた残りを, D の境界と, D' の境界に沿って, “逆向きに” 貼り合わせることで, 新しい閉曲面が構成できる. この操作でできる曲面を S と S' の連結和とよび, 記号 $S \# S'$ で表す.

定理. (向き付け可能な閉曲面の位相的分類)

任意の向き付け可能な閉曲面は次のモデルと同相である :

$$S^2, T^2, T^2 \# T^2, T^2 \# T^2 \# T^2 = \#_3 T^2, \dots, \#_g T^2, \dots$$

注意. なお, S^2 は 2 次元球面を表している. (S^2 の S が Sphere の “S”, 紛らわしいが, ここでは S^2 は $S \times S$ という意味ではない. なお, 曲面 S の S は Surface の S から由来している.)

余談. $S^2 = \#_0 T^2$ とみなすと, 考えやすい.

演習. $T^2, T^2 \# T^2, T^2 \# T^2 \# T^2 = \#_3 T^2$ を図示せよ.

定理. (向き付け不可能な閉曲面の位相的分類)

任意の向き付け不可能な閉曲面は次のモデルと同相である :

$$\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2, \dots, \#_g \mathbf{R}P^2, \dots$$

ここで, $\mathbf{R}P^2$ は射影平面である.

定義. 曲面 $\#_g T^2$ や $\#_g \mathbf{R}P^2$ に対し, 数 g を種数 (ジーナス, genus) とよぶ. 球面 S^2 は種数 0, トーラス T^2 は種数 1, 射影平面 $\mathbf{R}P^2$ は種数 1 である.

種数は位相不変量 (同相ならば等しい量) である.

● 単体的複体と多面体

十分に次元の大きな $\mathbf{R}^N$ の中で単体という基本的な図形を定めよう.

定義. (単体) $(n+1)$ -個の点 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbf{R}^N$ が一般の位置にあるとは, n 個のベクトル $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0$ が 1 次独立であるときにいう.

一般の位置にある $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n \rangle &:= \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{a}_i \mid 0 \leq \lambda_i \ (0 \leq i \leq n), \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^n \mu_j (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0) + \mathbf{a}_0 \mid 0 \leq \mu_j \ (1 \leq j \leq n), \sum_{j=1}^n \mu_j \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

で与えられる $\mathbf{R}^N$ の部分集合を $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ を頂点とする) n -単体 (n -simplex) という.

$\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ の一部分を選び, それらを頂点とする単体を $\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n \rangle$ の面 (face) とよぶ.

例. 0-単体は点, 1-単体は線分, 2-単体は三角形, 3-単体は四面体である.

三角形 $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ の面は, $2^3 - 1 = 7$ 個, $\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle, \langle a_2 a_0 \rangle, \langle a_0 a_1 \rangle$ として $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ である.

定義. (単体的複体) 単体からなる (無限でもよい) 集合 $\mathcal{C}$ が単体的複体 (simplicial complex) とは, 次の 2 条件 (1) かつ (2) かつ (3) をみたすときにいう:

- (1) 任意の $\Delta \in \mathcal{C}$ の面はすべて $\mathcal{C}$ に属する.
- (2) 任意の $\Delta, \Delta' \in \mathcal{C}$ に対して, 共通部分 $\Delta \cap \Delta'$ は空集合か, 空集合でなければ, Δ, Δ' 双方の面になる.
- (3) 任意の $\Delta \in \mathcal{C}$ に対して, Δ を面とするような $\mathcal{C}$ の単体は有限個である.

定義. (多面体) 単体的複体 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathbf{R}^N$ の部分集合

$$|\mathcal{C}| := \bigcup_{\Delta \in \mathcal{C}} \Delta \quad (= \{x \in \mathbf{R}^N \mid \exists \Delta \in \mathcal{C}, x \in \Delta\})$$

を多面体 (polyhedron) とよぶ.

余談. 多面体 $|\mathcal{C}|$ は単体的複体 $\mathcal{C}$ に属する単体を全部「糊付け」してできる図形である.

単体的複体 $\mathcal{C}$ が有限個の単体から構成されているとき, 単体的有限複体, あるいは単に有限複体とよぶ.

定義. (オイラー標数) $\mathcal{C}$ を有限複体とする. このとき, 多面体 $|\mathcal{C}|$ のオイラー標数 (Euler characteristic) を

$$\chi = \sum_{i=0}^N (-1)^i c_i$$

で定める. ただし, c_i は $\mathcal{C}$ に属する i -次元単体の個数である. (有限複体なので, 単体の個数は有限である.)

注意. 多面体 P が与えられたとき, $P = |\mathcal{C}|$ となるような $\mathcal{C}$ はたくさんあるが, オイラー標数は $\mathcal{C}$ のとり方によらずに, P だけで定まることを示すことができる. ($P = |\mathcal{C}| = |\mathcal{C}'|$ のとき, $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ の “共通細分” を取ることができることと, 細分をとってもオイラー標数が変わらないことから証明できる.)

例. 三角形 (2 単体) Δ を多面体と捉え, その三角形の 3 つの辺, 3 つの頂点からなる単体的複体を考える. このとき, $c_0 = 3, c_1 = 3, c_2 = 1$ (他の $c_i = 0$) なので, Δ のオイラー標数は $\chi = 3 - 3 + 1 = 1$ である.

演習. 正四面体の表面の頂点と辺と面の個数を数えて, 正四面体の表面のオイラー標数を計算せよ.

● 閉曲面の三角形分割と閉曲面のオイラー標数

定理. 種数 g の向き付け可能な閉曲面のオイラー標数は, $\chi = 2 - 2g$ である.

定義. オイラー標数 (Euler characteristic, Euler number)

$$\chi(S^2) = 2, \chi(\#_g T^2) = 2 - 2g. \quad \chi(\#_g \mathbf{R}P^2) = 2 - g.$$

(χ は「カイ」と読む).

注意. S^2 は $\mathbf{R}P^2$ の 2 重被覆. T^2 は $\mathbf{R}P^2 \# \mathbf{R}P^2$ の 2 重被覆. $\#_{g-1} T^2$ は $\#_g \mathbf{R}P^2$ の 2 重被覆.

$$\chi(\#_{g-1} T^2) = 2 - 2(g - 1) = 2(2 - g) = 2(\chi(\#_g \mathbf{R}P^2)).$$