

【 幾何学 3 : 曲線と曲面の幾何学 】

2025年度前期

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

● 授業計画

1. 平面曲線
2. 平面曲線の性質
3. 空間曲線
4. 曲面とは何か
5. 第一基本形式
6. 第二基本形式
7. 主方向と漸近方向
8. 測地線とガウス・ボンネの定理
9. 曲面の位相
10. 微分形式
11. ガウス・ボンネの定理 (多様体の場合)
12. 期末テスト
13. 幾何学の世界

● 教科書は使用しない.

参考書

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)」裳華房 (1995).

梅原雅顕, 山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」裳華房 (2015).

宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」岩波書店 (2019).

8. 測地線とガウス・ボンネの定理

● 測地線

助変数表示された曲面 $\mathbf{p}(u, v)$ の上にある空間曲線

$$\gamma(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$$

を考える．ここでは，パラメータ t は γ の弧長とは限らないとする． γ の t に関する 2 階微分（加速度ベクトル） $\ddot{\gamma}$ を曲面に接するベクトルと法線方向のベクトルの和に分解できる：

$$\ddot{\gamma}(t) = [\ddot{\gamma}(t)]^T + [\ddot{\gamma}(t)]^N.$$

$[\ddot{\gamma}(t)]^T$ は，いわば，“曲面上で感じる”加速度， $[\ddot{\gamma}(t)]^N$ は“曲面上では感じない”加速度，といった意味合いがある．

定義. $[\ddot{\gamma}(t)]^T = \mathbf{0}$ となるとき, 曲面上の曲線 γ を測地線 (geodesic) をよぶ.

γ が測地線とすると, $\ddot{\gamma}(t) = [\ddot{\gamma}(t)]^N$ となり, これは曲面の法線の方を向いているので, 速度ベクトル (接ベクトル) $\dot{\gamma}(t)$ と直交する. したがって, γ が測地線ならば,

$$\frac{d}{dt}\{\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)\} = \ddot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) + \dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) = 0$$

となるので, $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)$ は一定である. 次を得る:

命題. 曲面上の曲線 γ が測地線ならば $\|\dot{\gamma}(t)\|$ は t に依らず一定である. このとき, パラメータ t は弧長パラメータ s に比例する.

例. (平面上の直線) 平面上の直線 $\gamma(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ は直線の方角ベクトル) は $\ddot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ だから, 当然 $[\ddot{\gamma}(t)]^T = \mathbf{0}$ であり, 測地線である.

例. (円柱上の常螺旋) $a > 0, b \neq 0$ とする. 半径 a の円柱 $\mathbf{p}(u, v) = \begin{pmatrix} a \cos u \\ a \sin u \\ v \end{pmatrix}$

の上の曲線 $\gamma(t) = \mathbf{p}(t, bt) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{pmatrix}$ を常螺旋 (じょうらせん, つるまき

線, helix) とよぶ. 常螺旋は円柱上の測地線である. 実際, $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix}$,

$\ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -a \cos t \\ -a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ であり, $\mathbf{p}_u(u, v) = \begin{pmatrix} -a \sin u \\ a \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_u(t, bt) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{p}_v(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_v(t, bt) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから, $\ddot{\gamma}(t) \cdot \mathbf{p}_u(t, bt) = 0, \ddot{\gamma}(t) \cdot \mathbf{p}_v(t, bt) = 0$

となり, $\ddot{\gamma}$ は曲面の接平面と垂直なので, $\ddot{\gamma} = [\ddot{\gamma}(t)]^N$ であって, $[\ddot{\gamma}(t)]^T = \mathbf{0}$ である.

例. (球面上の大円) 半径 a の球面を, その中心を通る平面で切ってできる切り口の曲線が大円 (だいえん, great circle) とよぶ. 大円は, 平面上の直交する単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を使って,

$$\gamma(t) = (a \cos t)\mathbf{e}_1 + (a \sin t)\mathbf{e}_2$$

と表される. $\ddot{\gamma}(t) = -(a \cos t)\mathbf{e}_1 - (a \sin t)\mathbf{e}_2 = -\gamma(t)$ は接平面と直交するから, $[\ddot{\gamma}(t)]^T = 0$ なので, 上のように表された大円は測地線である.

例. (回転双曲面, 円錐上の測地線) 曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = c$ は z -軸まわりの回転に関して対称である. $c > 0$ のときは一葉双曲面, $c < 0$ のときは二様双曲面, $c = 0$ のときは円錐を表す. このとき, 各 c について, 原点を通る平面で切った切り口は (速度一定にパラメータ付ければ) 測地線となる. (証明は省略)

● 測地的曲率と測地線

一般論に戻る.

曲面 $\mathbf{p}(u, v)$ 上の弧長パラメータ s で表した曲線 $\gamma(s) = \mathbf{p}(u(s), v(s))$ について, 2 階微分 γ'' の分解は, 前回, 曲線の法曲率を定義するときに使った分解

$$\gamma'' = [\gamma'']^T + [\gamma''(t)]^N = \kappa_g + \kappa_n,$$

(測地的曲率ベクトルと法曲率ベクトルへの分解) になる. ただし,

$$[\gamma'']^T = \kappa_g = \gamma'' - (\gamma'' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad [\gamma''(t)]^N = \kappa_n = (\gamma'' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

である. 前回, すでに導入していたが, 改めて次の定義をする:

定義. 曲面上の弧長でパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ について, $\gamma' = \gamma'(s)$ と曲面の単位法ベクトル $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s) = \mathbf{n}(u(s), v(s))$ の両方に直交して, 行列式 $|\gamma', \mathbf{n}_g, \mathbf{n}| = 1$ となる単位接ベクトル $\mathbf{n}_g = \mathbf{n}_g(s)$ を測地的法ベクトルとよび,

$$\kappa_g := \kappa_g \cdot \mathbf{n}_g = \{\gamma'' - (\gamma'' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}\} \cdot \mathbf{n}_g = \gamma'' \cdot \mathbf{n}_g$$

を測地的曲率 (geodesic curvature) とよぶ. (太文字はベクトルを表し, 細文字はスカラーを表す.)

命題. $\boldsymbol{n}_g(s) = \boldsymbol{n}(s) \times \boldsymbol{\gamma}'(s)$ である.

証明. $\boldsymbol{n}(s)$ と $\boldsymbol{\gamma}'(s)$ は単位ベクトルで互いに直交している. $\boldsymbol{n}(s) \times \boldsymbol{\gamma}'(s)$ は単位ベクトルで, $\boldsymbol{n}(s)$ と $\boldsymbol{\gamma}'(s)$ の両方に直交しているので, 符号を除いて $\boldsymbol{n}_g(s)$ に一致する. さらに, 行列式 $|\boldsymbol{\gamma}' \quad \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\gamma}' \quad \boldsymbol{n}| = |\boldsymbol{n} \quad \boldsymbol{\gamma}' \quad \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\gamma}'| = 1$ だから, $\boldsymbol{n}_g(s) = \boldsymbol{n}(s) \times \boldsymbol{\gamma}'(s)$ が成り立つ. $\square$

命題. 測地的曲率 κ_g と法曲率 κ_n について,

$$\boldsymbol{\gamma}'' = \kappa_g \boldsymbol{n}_g + \kappa_n \boldsymbol{n}$$

が成り立つ.

証明. $\|\gamma'(s)\| = 1$ なので, $0 = \frac{d}{ds} \{\gamma'(s) \cdot \gamma'(s)\} = 2\gamma''(s) \cdot \gamma'(s)$ だから,
 $\gamma''(s) \cdot \gamma'(s) = 0$ である. よって, γ'' は $\mathbf{n}_g$ と $\mathbf{n}$ の 1 次結合で書くことができる.
 $\gamma'' = a\mathbf{n}_g + b\mathbf{n}$ とおくと, $\kappa_g = \gamma'' \cdot \mathbf{n}_g = a$ であり, $\kappa_n = \gamma'' \cdot \mathbf{n} = b$ である. よって,
 $\gamma'' = \kappa_g \mathbf{n}_g + \kappa_n \mathbf{n}$ が成り立つ. $\square$

定理. 曲面上の弧長でパラメータ付けられた曲線 $\gamma(s)$ が測地線であるための必要十分条件は, $\kappa_g = 0$ (測地的曲率がゼロ) である.

証明. $\gamma(s)$ が測地線するとき, $\boldsymbol{\kappa}_g = [\gamma'']^T = \mathbf{0}$ だから, $\kappa_g = \boldsymbol{\kappa}_g \cdot \mathbf{n}_g = 0$ である.

逆に $\kappa_g = 0$ とすると, $[\boldsymbol{\kappa}''(s)]^T = \kappa_g \mathbf{n}_g = \mathbf{0}$ である. よって, $\gamma(s)$ は測地線である.

$\square$

例. 半径 a の球面 $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a \cos u \cos v \\ a \cos u \sin v \\ a \sin u \end{pmatrix}$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ の上で,

円 $\gamma(v) = \mathbf{p}(u_0, v) = \begin{pmatrix} a \cos u_0 \cos v \\ a \cos u_0 \sin v \\ a \sin u_0 \end{pmatrix}$ を考える.

このとき, (v -微分) $\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} -a \cos u_0 \sin v \\ a \cos u_0 \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから, $\|\dot{\gamma}\|^2 = \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = a^2 \cos^2 u_0 \sin^2 v + a^2 \cos^2 u_0 \cos^2 v = a^2 \cos^2 u_0$ なので, $\|\dot{\gamma}\| = a \cos u_0$ である. したがって, $s = (a \cos u_0)v$ と調節すれば, s は γ の弧長パラメータとなる. このとき $v = \frac{s}{a \cos u_0}$ であるから, $\frac{dv}{ds} = \frac{1}{a \cos u_0}$ なので, γ の s に関する微分は

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{ds} = \frac{1}{a \cos u_0} \begin{pmatrix} -a \cos u_0 \sin v \\ a \cos u_0 \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. (確かに単位ベクトルである.) さらに,

$$\gamma'' = \frac{d\gamma'}{ds} = \frac{d\gamma'}{dv} \frac{dv}{ds} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a \cos u_0} \cos v \\ -\frac{1}{a \cos u_0} \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. また, 曲面上で $\mathbf{p}_u(u, v) = \begin{pmatrix} -a \sin u \cos v \\ -a \sin u \sin v \\ a \cos u \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_v(u, v) = \begin{pmatrix} -a \cos u \sin v \\ a \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$

であり, $\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{\|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\|} = -\frac{1}{a} \mathbf{p}(u, v)$ であった (第 6 回講義ノート p.6).

曲線上で $\mathbf{p}_u(u_0, v) = \begin{pmatrix} -a \sin u_0 \cos v \\ -a \sin u_0 \sin v \\ a \cos u_0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_v(u_0, v) = \begin{pmatrix} -a \cos u_0 \sin v \\ a \cos u_0 \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$ であり,

$\mathbf{n}(u_0, v) = -\frac{1}{a} \mathbf{p}(u_0, v)$ である. このとき,

$$\mathbf{n}_g = \mathbf{n} \times \gamma' = \begin{pmatrix} \sin u_0 \cos v \\ \sin u_0 \sin v \\ -\cos u_0 \end{pmatrix}$$

であり,

$$\kappa_g = \gamma'' \cdot \mathbf{n}_g = -\frac{\tan u_0}{a}$$

となる. $-\frac{\pi}{2} < u_0 < \frac{\pi}{2}$ なので, γ が測地線, つまり $\kappa_g = 0$ となるのは, $\tan u_0 = 0$, つまり $u_0 = 0$ のとき, つまり γ が赤道のときであり, そのときに限る. $\square$

演習. 上の例について次に答えよ.

$$(1) \mathbf{n}(u_0, v) = \begin{pmatrix} -\cos u_0 \cos v \\ -\cos u_0 \sin v \\ -\sin u_0 \end{pmatrix}, \gamma'(u_0, v) = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma''(u_0, v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a \cos u_0} \cos v \\ -\frac{1}{a \cos u_0} \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \text{ から, } \mathbf{n}_g = \mathbf{n} \times \gamma' \text{ と } \kappa_g = \gamma'' \cdot \mathbf{n}_g \text{ を求めよ.}$$

(2) (1) で $\kappa_g = 0$ となる u_0 を求めよ.

□

注. 曲面上の曲線 $\gamma(s)$ の空間曲線としての曲率 $\kappa(s)$ ($\gamma''(s)$ の長さ) と測地的曲率 $\kappa_g(s)$ と法曲率 $\kappa_n(s)$ について $\kappa = \sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}$ が成り立つ.

● 測地線と最短線

曲面上の 2 点 P, Q を結ぶ曲面上の曲線のうち長さが最小（最短）である曲線を最短線と呼ぶ。証明は省略するが、次が成り立つことが知られている。

定理. 最短線は測地線である。逆に測地線はその測地線上の十分近い 2 点を結ぶ部分は最短線になる。

注意. 測地線は最短線とは限らない。たとえば、球面上の近くの 2 点 P, Q に対し、その 2 点を通る大円のうち、遠回りして P と Q を結ぶ方の部分は、測地線だが最短線ではない。

● 測地線の微分方程式

平面上の測地線は直線である。直線は 2 階微分（加速度）が恒等的に零という条件で

規定される．一般の曲面上の曲線が測地線になる条件はどう規定されるだろうか？

曲面 $\mathbf{p}(u, v)$ の第一基本量 E, F, G とその偏微分を使って，クルストフェルの記号と呼ばれる 8 個の関数

$$\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2$$

定義され（例えば， $\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}$ ．詳しい定義・説明は省略する），次が成り立つ．

命題.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{p}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{p}_v + L \mathbf{n} \\ \mathbf{p}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{p}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{p}_v + M \mathbf{n} \\ \mathbf{p}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{p}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{p}_v + N \mathbf{n} \end{aligned}$$

ただし， L, M, N は第二基本量， $\mathbf{n}$ は単位法線ベクトルである．

注. $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v, \mathbf{n}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底であり, ベクトル $\mathbf{p}_{uu}, \mathbf{p}_{uv}, \mathbf{p}_{vv}$ をそれぞれ基底の 1 次結合で一意的に表したのが上の式である. $\mathbf{n}$ の係数が, それぞれ L, M, N になるのは, 第 6 回講義で説明した式, $L = \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{n}, M = \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{n}, N = \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{n}$ からわかる. $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ の係数がクルストフェルの記号で与えられるのである.

(命題の証明は, 梅原・山田「曲線と曲面, 改訂版」の pp.122–123 にある.)

さて, 曲線 $\gamma(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t))$ が測地線である条件は $[\ddot{\gamma}]^T = 0$ だった.

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \dot{u}\mathbf{p}_u + \dot{v}\mathbf{p}_v, \\ \ddot{\gamma} &= \ddot{u}\mathbf{p}_u + \ddot{v}\mathbf{p}_v + \dot{u}^2\mathbf{p}_{uu} + 2\dot{u}\dot{v}\mathbf{p}_{uv} + \dot{v}^2\mathbf{p}_{vv} \\ &= (\ddot{u} + \dot{u}^2\Gamma_{11}^1 + 2\dot{u}\dot{v}\Gamma_{12}^1 + \dot{v}^2\Gamma_{22}^1)\mathbf{p}_u \\ &\quad + (\ddot{v} + \dot{u}^2\Gamma_{11}^2 + 2\dot{u}\dot{v}\Gamma_{12}^2 + \dot{v}^2\Gamma_{22}^2)\mathbf{p}_v + (\dot{u}^2L + 2\dot{u}\dot{v}M + \dot{v}^2N)\mathbf{n}\end{aligned}$$

なので,

$$[\ddot{\gamma}]^T = (\ddot{u} + \dot{u}^2\Gamma_{11}^1 + 2\dot{u}\dot{v}\Gamma_{12}^1 + \dot{v}^2\Gamma_{22}^1)\mathbf{p}_u + (\ddot{v} + \dot{u}^2\Gamma_{11}^2 + 2\dot{u}\dot{v}\Gamma_{12}^2 + \dot{v}^2\Gamma_{22}^2)\mathbf{p}_v$$

を得る．したがって， γ が測地線になる条件は

$$\begin{cases} \ddot{u} + \dot{u}^2 \Gamma_{11}^1 + 2\dot{u}\dot{v} \Gamma_{12}^1 + \dot{v}^2 \Gamma_{22}^1 = 0, \\ \ddot{v} + \dot{u}^2 \Gamma_{11}^2 + 2\dot{u}\dot{v} \Gamma_{12}^2 + \dot{v}^2 \Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

で与えられる．このように，測地線は 2 階の常微分方程式によって表される．この方程式を測地線の方程式という．

例. (円柱) 曲面 $\mathbf{p}(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \\ r \sin u \\ v \end{pmatrix}$ は半径 r の円柱を与える．この場合，

$$\mathbf{p}_u = \begin{pmatrix} -r \sin u \\ r \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり，

$$\mathbf{p}_{uu} = -r \mathbf{n}, \quad \mathbf{p}_{uv} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_{vv} = \mathbf{0}$$

なので, $L = -r, M = 0, N = 0$ であり, すべてのクルストフェルの記号は零となる. このとき, 測地線の方程式は

$$\ddot{u} = 0, \quad \ddot{v} = 0$$

となり, 測地線は uv -平面の直線

$$u(t) = a_1 t + b_1, \quad v(t) = a_2 t + b_2,$$

(a_1, b_1, a_2, b_2 は定数, $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$) となる (円柱は平面に等長的に展開できるので自然な結果である). そして,

$$\boldsymbol{p}(u(t), v(t)) = \begin{pmatrix} r \cos(a_1 t + b_1) \\ r \sin(a_1 t + b_1) \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix}$$

は常螺旋となる.

● 測地三角形のガウス-ボンネの定理

ここで話題を変えて、測地三角形に対するガウス-ボンネの定理と呼ばれる有名な定理を紹介する。

曲面 $\mathbf{p}(u, v)$ について、ガウス曲率 $K = \lambda_1 \lambda_2$ (主曲率の積) と面積要素

$$dA = |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| du dv$$

が定まっていた。

曲面上で測地線からできている三角形を測地三角形とよぶ。次が成り立つ：

定理. (測地三角形のガウス-ボンネの定理) 曲面上の測地三角形 $\triangle ABC$ の内角を $\angle A, \angle B, \angle C$ とすると

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \iint_{\triangle ABC} K dA.$$

が成り立つ. ただし, K は曲面のガウス曲率で, dA は曲面の面積要素である. $\square$

この定理により, $\triangle ABC$ 上で, K が零のときは, 測地三角形の内角の和は π (180°) であるが, K が正のときは, 測地三角形の内角の和は π より大きく, K が負のとき, 測地三角形の内角の和は π より小さい.

● 閉曲面のガウス-ボンネの定理

定理. (閉曲面のガウス-ボンネの定理) $\mathbf{R}^3$ の閉曲面 S に対して,

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ.

証明の概略. 曲面は有限個の測地三角形 $T_1, \dots, T_n$ に分割できる. 分割において総数が ℓ 個の頂点が生じるとし, それらを $v_1, \dots, v_\ell$ とし, 各頂点 v_k には m_k 個の測地三

角形 $T_{k,1}, \dots, T_{k,m_k}$ が集まっているとする. 頂点 v_k に集まる三角形の内角の総和は 2π だから,

$$\begin{aligned} 2\pi\ell &= \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{m_k} (T_{k,i} \text{ の } v_k \text{ での内角}) = (\text{すべての三角形の内角の和}) \\ &= \pi n + \sum_{j=1}^n \iint_{T_j} K dA = \pi n + \iint_S K dA, \end{aligned}$$

つまり,

$$\iint_S K dA = 2\pi\ell - \pi n$$

が成り立つ. 1 本の辺は 2 個の測地三角形に共有され, 1 個の測地三角形は 3 本の辺に囲まれるから, 辺の総数を s とすれば, $3n = 2s$ となるので,

$$\begin{aligned} \iint_S K dA &= 2\pi\ell - 2\pi s + (2\pi s - \pi n) \\ &= 2\pi\ell - 2\pi s + 2\pi n = 2\pi(\ell - s + n) \end{aligned}$$

と書き換えることができる. S の三角形分割において, ℓ は頂点の数, s は辺の数, n は面の数だから $\ell - s + n = \chi(S)$ である. (曲面の位相については次回に改めて紹介します.)

したがって,

$$\iint_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ.

□