【 幾何学 3： 曲線と曲面の幾何学 】

２０２５年度前期

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

● 授業計画

1．平面曲線　2．平面曲線の性質　3．空間曲線　4．曲面とは何か　5．第一基本形式　6．第二基本形式　7．主方向と漸近方向　8．測地線とガウス・ボンネの定理　9．曲面の位相　10．微分形式　11．ガウス・ボンネの定理（多様体の場合）　12．期末テスト　13．幾何学の世界

● 教科書は使用しない．

参考書

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)」裳華房 (1995).

梅原雅顕，山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」裳華房 (2015).

宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」岩波書店 (2019).

7.　主方向と漸近方向

● 曲面上の曲線

1 回目と 2 回目の講義で，平面曲線の話をした．今回は，曲面の上の曲線（曲面曲線）の話をしよう．

空間曲面 $\boldsymbol{p}(u, v)$ 上にある空間曲線を考える．そのような曲線は，uv-平面上の曲線 $(u(s), v(s))$ を曲面のパラメータ付け $\boldsymbol{p}$ で送ってできる：$\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{p}(u(s), v(s))$. ただし，$s$ は空間曲線としての弧長パラメータである．弧長でパラメータ付けているので，$\boldsymbol{\gamma}$ の s-微分（s に関する速度ベクトル）の長さは 1 である．つまり，$\|\boldsymbol{\gamma}'(s)\| = 1$ である．（$\boldsymbol{\gamma}'$ は s-微分であることを思い出そう.）

$\boldsymbol{\gamma}'$ を計算すると，

$$\boldsymbol{\gamma}'(s) = \boldsymbol{p}_u(u(s), v(s))u'(s) + \boldsymbol{p}_v(u(s), v(s))v'(s)$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}'(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}'(s) &= (\boldsymbol{p}_u u'(s) + \boldsymbol{p}_v v'(s))\cdot(\boldsymbol{p}_u u'(s) + \boldsymbol{p}_v v'(s)) \\
&= \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u(u'(s))^2 + 2\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v u'(s)v'(s) + \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v(v'(s))^2 \\
&= E(u'(s))^2 + 2Fu'(s)v'(s) + G(v'(s))^2
\end{aligned}$$

であるので，$E(u'(s))^2 + 2F\ u'(s)v'(s) + G(v'(s)^2) = 1$ である．

● 法曲率

いま，$\boldsymbol{\gamma}$ の加速度ベクトル $\boldsymbol{\gamma}''(s)$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{\gamma}'' - (\boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ を作り，曲面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ との内積をとると，

$$\{\boldsymbol{\gamma}'' - (\boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{n} = 0$$

となるので，ベクトル $\boldsymbol{\gamma}''$ は，$\boldsymbol{n}$ に垂直な（したがって曲面に接する）ベクトル $\boldsymbol{\gamma}'' - (\boldsymbol{\gamma}'' \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ と法線方向のベクトル $(\boldsymbol{\gamma}'' \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ とに分解できる：

$$\boldsymbol{\gamma}'' = \boldsymbol{\kappa}_g + \boldsymbol{\kappa}_n \quad \text{ただし，} \quad \boldsymbol{\kappa}_g := \boldsymbol{\gamma}'' - (\boldsymbol{\gamma}'' \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{\kappa}_n := (\boldsymbol{\gamma}'' \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}.$$

（ここで，すべてのベクトルは弧長パラメータ s を変数にもっていることに注意する．微分 $'$ は s-微分である．）

ベクトル $\boldsymbol{\kappa}_g(s)$ を**測地的曲率ベクトル** (geodesic curvature vector)，ベクトル $\kappa_n(s)$ を**法曲率ベクトル** (normal curvature vector) とよぶ．また，上の分解の $\boldsymbol{n}$ の係数 $\boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{n}$ を

$$\kappa_n := \boldsymbol{\gamma}'' \cdot \boldsymbol{n}$$

とおいて，**法曲率** (normal curvature) とよぶ．

法曲率ベクトルは太文字の $\boldsymbol{\kappa}_n$ で書いて，法曲率は普通の文字 κ_n で書いて区別している．（少し紛らわしいので注意．）

また，曲面の単位接ベクトル $\boldsymbol{n}_g$（測地的法ベクトル）を γ' と $\boldsymbol{n}$ の両方に直交して $|\gamma', \boldsymbol{n}_g, \boldsymbol{n}| = 1$ となるように選んだとき，

$$\kappa_g := \boldsymbol{\kappa}_g \cdot \boldsymbol{n}_g \ = \ \{\boldsymbol{\gamma}'' - (\boldsymbol{\gamma}'' \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\} \cdot \boldsymbol{n}_g \ = \ \boldsymbol{\gamma}'' \cdot \boldsymbol{n}_g$$

を**測地的曲率** (geodesic curvature) とよぶ．測地的曲率については，後で（測地線との関連させて）第 8 回の講義でも説明する（予定）.

さて，$\boldsymbol{\gamma}(s) = \boldsymbol{p}(u(s), v(s))$ について，$\boldsymbol{\gamma}' \cdot \boldsymbol{n} = 0$ だから，$\boldsymbol{\gamma}'' \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\gamma}' \cdot \boldsymbol{n}' = 0$ である．したがって，

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= \boldsymbol{\gamma}'' \cdot \boldsymbol{n} \\
&= -\boldsymbol{\gamma}' \cdot \boldsymbol{n}' \\
&= -(\boldsymbol{p}_u u' + \boldsymbol{p}_v v') \cdot (\boldsymbol{n}_u u' + \boldsymbol{n}_v v') \\
&= (-\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v)(u')^2 + (-\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_v)(u'v') + (-\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n}_u)(v'u') + (-\boldsymbol{p}_v \boldsymbol{n}_v)(v')^2 \\
&= L(u')^2 + 2M(u'v') + N(v')^2
\end{aligned}$$

を得る．（第二基本形式の項目を参照．）よって，曲面上の曲線の法曲率は（曲面の第

二基本形式と）曲線の接ベクトルの向きのみによって定まる．（弧長 s をパラメータにしているので，(u', v') は単位ベクトルで，向きを決めれば決まる．向きを逆にすれば，$(-u', -v')$ に変わる．）

演習． (1) 半径 a の球面 $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ a\cos u\sin v \\ a\sin u \end{pmatrix}$ の第一基本量 $E = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_u, F = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v, G = \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_v$ と第二基本量 $L = \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{n}, M = \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{n}, N = \boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{n}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{n} = -\frac{1}{a}\boldsymbol{p}$ となることを用いてよい．
(2) $u = u_0$（一定）とおいてできる球面上の円 $\boldsymbol{p}(u_0, v)$ (緯線，line of latitude) の法曲率 κ_n を求めよ．
（ヒント：$E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = 1$ の時に $\kappa_n = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2$ となることを用いるとよい．）

● 法曲率の幾何学的な意味

空間曲面を 1 つ決めて，その上の 1 点を決める．そして，その点を通り，その点での法線方向を含む平面をいろいろ考えて，曲面を切ると，いろいろな平面曲線（直截口，ちょくせつこう，ちょくさいこう）が得られる．（たとえば，魚を包丁でスパッと切った切り口をイメージするとよい.）

定理.　曲面上の曲線 $\gamma(s)$（s は弧長パラメータ）の点 $P = \gamma(s_0)$ における法曲率は，点 P においての曲面の法線方向 $\boldsymbol{n}$ と曲線の接ベクトル $\gamma'(s_0)$ を含む平面で切ってできる平面曲線（直截口）の平面曲線としての曲率に等しい．ただし，切る平面には，$\gamma'(s_0)$ の方向を x-軸，$\boldsymbol{n}$ の方向を y-軸とする向きを入れる.

注意.　空間曲線の曲率は，定義により非負であったが，一方，平面曲線の曲率には正負があった．法線の方向のとり方によって正負が変わった．（平面曲線の曲率を定義するとき，曲線の弧長が増加する方向を「正の向きに」 $\frac{\pi}{2}$ だけ回転して法線方向を決めて曲率を定義していたことを思い出そう．そこで，$\gamma'(s_0)$ の方向を 「$\frac{\pi}{2}$ だけ回転」して $\boldsymbol{n}$

になる，というように，もとの平面の向きを与えておけ，ということである．）

証明. 直截口を $\sigma(s)$ とする．（s は σ の $\gamma'(s_0)$ 方向の弧長パラメータであると同時に $\gamma(s)$ の弧長パラメータで，$P = \gamma(s_0) = \sigma(s_0)$ とする．）曲面上の曲線 γ の点 P における法曲率は，曲線の接ベクトルの方向だけで決まっていたから，

$$\kappa_n = \gamma''(s_0) \cdot \boldsymbol{n} = -\gamma'(s_0) \cdot \boldsymbol{n}' = -\sigma'(s_0) \cdot \boldsymbol{n}' = \sigma''(s_0) \cdot \boldsymbol{n}$$

である．（$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(P)$, $\boldsymbol{n}'$ は $\sigma'(s_0) = \gamma'(s_0)$ 方向の s-微分．）$\sigma''(s_0)$ は $\sigma'(s_0) = \gamma'(s_0)$ に直交するので，$\sigma''(s_0)$ は $\boldsymbol{n}$ と平行である．したがって，$\sigma''(s_0) = \kappa_n \boldsymbol{n}$ となる． □

命題. 曲面上の点 P における法曲率の（あらゆる方向に関する）最大値と最小値は，その点における主曲率に一致し，それらの積と平均はそれぞれガウス曲率と平均曲率に等しい．

ここで主曲率とは，ワインガルテン行列

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

の固有値のことだった．

定義． 曲面の点 P における主曲率 λ_1, λ_2 を与える接ベクトル（固有ベクトル）の方向を**主方向** (principal direction) とよぶ．

命題の証明． 曲面上の接ベクトル $\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial v}$ （u 方向に α，v 方向に β の成分をもつベクトル）が（第一基本形式に関して）単位ベクトル（長さ 1）になる条件は

$$E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = 1$$

であることである．すると，その方向の法曲率は

$$\kappa_n = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2 = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2}$$

と書き（“わざと” だが）表すことができる．この等式は，$E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = 1$ をみたす (α, β) の方向の法曲率を与える式だが，よく見ると，式

$$\lambda(\alpha, \beta) := \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2}$$

は，(α, β) を $r(\neq 0)$ 倍した $(r\alpha, r\beta)$ に換えても値が変わらないから，$\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ の (α, β) について，$E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2 = 1$ を満たすかどうかに関わらず，その方向の法曲率を与えていることに気がつくだろう．

上で定めた (α, β) に関する関数 $\lambda(\alpha, \beta)$ の最大値・最小値を調べよう．関数 $\lambda(\alpha, \beta)$ が最大・最小になるところでは，$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = 0, \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = 0$ だから，等式（おおげさに言えば，関数 λ の陰関数表示）

$$L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2 - (E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2)\lambda = 0$$

の両辺を α, β で偏微分して，

$$\begin{cases} 2L\alpha + 2M\beta - (2E\alpha + 2F\beta)\lambda - (E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2)\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = 0, \\ 2M\beta + 2N\beta - (2F\beta + 2G\beta)\lambda - (E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2)\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = 0, \end{cases}$$

となるので，

$$\begin{cases} L\alpha + M\beta - (E\alpha + F\beta)\lambda = 0, \\ M\beta + N\beta - (F\beta + G\beta)\lambda = 0, \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} (L - \lambda E)\alpha + (M - \lambda F)\beta = 0, \\ (M - \lambda F)\alpha + (N - \lambda G)\beta = 0, \end{cases}$$

を得る．α, β にかんするこの連立 1 次方程式を満たす自明でない解 $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ があるので，

$$\begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つ．

行列 A に対する固有方程式（固有値を求める方程式）は $|tI - A| = 0$ （ただし I は

単位行列）であるが，

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} |tI - A| &= \left| \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} (tI - A) \right| \\
&= \left| t \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} tE - L & tF - M \\ tF - M & tG - N \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} L - tE & M - tF \\ M - tF & N - tG \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

が成り立ち，$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ は正則行列なので，$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \neq 0$ だから，$t = \lambda$ が最大値・最小値であれば，それは A の固有値，すなわち主曲率となる．

逆に，$t = \lambda$ が A の固有値（主曲率）であれば，それは $\lambda(\alpha, \beta)$ の臨界値であり，高々 2 つの値しかないので，必然的に最大値か最小値になる．

また，λ_1, λ_2 を主曲率とすると，

$$\begin{vmatrix} L - tE & M - tF \\ M - tF & N - tG \end{vmatrix} \begin{aligned} &= t^2(EG - F^2) - t(EN + GL - 2FM) + LN - M^2 \\ &= (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \end{aligned}$$

なので，（解と係数の関係と）ガウス曲率，平均曲率の定義から

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2}\frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = H$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K$$

がわかる． □

● 臍点

定義． 主曲率 λ_1, λ_2 が一致する点を曲面の**臍点**（せいてん，へそてん，ほぞてん，umbilic point）とよぶ．

臍点では，上で考察した方向 (α, β) の関数 $\lambda(\alpha, \beta)$ の最大値と最小値が一致するので定数になる．また，

$$4(H^2 - K) = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

であるから，次が成り立つ．

命題． 曲面上の点が臍点であることと，その点で $H^2 - K = 0$ となることは同値である．

また，次のことも知られている：

命題． すべての点が臍点である曲面は，平面または球面の一部である．

● オイラーの公式

以下，臍点でない点の近くでの曲面の挙動を調べる．

曲面上に臍点でない点 P をとり，その点での接平面が P を原点とする xy-座標平面となり，法線方向が z-軸となるように空間の座標軸を設定しておく．さらに，xy-平面を z 軸のまわりに回転させて，x-軸の方向が 1 つの主方向になるようにする．このとき，法曲率を求める次の公式がある：

定理．（オイラーの公式）y-軸方向がもう 1 つの主方向となり，2 つの主方向は $\mathbf{R}^3$ のベクトルとして直交する．このとき，x-軸方向の主曲率を λ_1 とし，y-軸方向の主曲率を λ_2 とすると，接平面において x-軸から角度 φ をなす方向の法曲率 κ_n は

$$\kappa_n = \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi$$

で与えられる．

証明． 上のような xyz-座標について，曲面を $z=f(x,y)$（関数 $f(x,y)$ のグラフ）の形で表し，P を原点とする．曲面は xy-平面と接しているから，$f_x(0,0)=0.f_y(0,0)=0$ である．したがって，第一基本行列は原点では単位行列となる．このとき，ワインガルテン行列は第二基本行列 $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ に等しい．x-軸方向が主方向だから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルなので，$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix}$ が $\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に等しいから，$M=0$ であり，ワインガルテン行列は対角行列となり，y-軸方向がもう 1 つの主方向となる．このとき，$L=\lambda_1, N=\lambda_2$ である．$E=G=1, F=0$ なので，接平面の計量は原点ではユークリッド計量であり，$\theta=\varphi$ となり，

$$\kappa_n=\lambda_1\cos^2\varphi+\lambda_2\sin^2\varphi$$

と表される． □

● 漸近方向

曲面上の点 P において，法曲率が 0 になる接ベクトルの方向を**漸近方向**（ぜんきんほうこう，asymptotic direction) とよぶ.

曲面上のガウス曲率 K が正となる点を**楕円点** (elliptic point)，K が零となる点を**放物点** (parabolic point)，K が負となる点を**双曲点** (hyperbolic point) とよぶ.

命題. 曲面上の楕円点には漸近方向は存在しない．臍点でない放物点にはただ 1 つの漸近方向が存在する．双曲点には相異なる 2 つの漸近方向が存在する.

証明. 楕円点においては，$K = \lambda_1\lambda_2 > 0$ なので，λ_1, λ_2 は（0 ではなく）正負を共にする．よって，主曲率はすべての方向で正か，すべての方向で負である．したがって，漸近方向は存在しない.

臍点でない放物点では，$\lambda_1 = 0$ で $\lambda_2 \neq 0$ か，$\lambda_1 \neq 0$ で $\lambda_2 = 0$ か，である．このとき，このとき法曲率が 0 になる方向（ワインガルテン行列の固有値 0 に対する固有空間の方向）はただ 1 つしかない.

P が双曲点とし，主曲率を λ_1, λ_2 とする．オイラーの公式により，λ_1 に対応する主方向から角度 φ をなす方向の法曲率は

$$\kappa_n = \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi$$

で与えられる．λ_1, λ_2 が異符号なので，φ が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動く間と $\frac{\pi}{2}$ から π まで動く間にそれぞれ法曲率が 0 になる方向がちょうど 1 つずつ存在する．したがって，相異なる 2 つの漸近方向が存在することがわかる． $\Box$