# 【 幾何学 3： 曲線と曲面の幾何学 】

２０２５年度前期

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

● 授業計画

1．平面曲線　2．平面曲線の性質　3．空間曲線　4．曲面とは何か　5．第一基本形式　6．第二基本形式　7．主方向と漸近方向　8．測地線とガウス・ボンネの定理　9．曲面の位相　10．微分形式　11．ガウス・ボンネの定理（多様体の場合）　12．期末テスト　13．幾何学の世界

● 教科書は使用しない.

参考書

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)」裳華房 (1995).

梅原雅顕，山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」裳華房 (2015).

宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」岩波書店 (2019).

# 6.　第二基本形式

前回に紹介した曲面の第一基本形式は，曲面の “伸び縮み具合” あるいは “縮尺の度合い” を表していた．今回は，曲面の “曲がり具合” を表す第二基本形式と関連する曲率について紹介する．

## ● 第二基本形式

曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ に対して，単位法線ベクトル

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|}\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$$

が定められた．いま，外微分

$$d\boldsymbol{p} := \boldsymbol{p}_u du + \boldsymbol{p}_v dv, \quad d\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_u du + \boldsymbol{n}_v dv$$

について，形式

$$II := -d\boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{n} = -(\boldsymbol{p}_u du + \boldsymbol{p}_v dv) \cdot (\boldsymbol{n}_u du + \boldsymbol{n}_v dv)$$

を曲面の**第二基本形式** (first fundamental form) とよぶ．第二基本形式の意味合いについて説明していく．

まず，上の定義式の最右辺を展開すると

$$II = (-\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_u)du^2 + (-\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_v - \boldsymbol{p}_v \boldsymbol{n}_u)dudv + (-\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n}_v)dv^2$$

となる．

さて，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ の両方と直交するので（内積がゼロなので），

$$\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

である．この関係式の両辺を偏微分して，

$$\boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_u = 0,\ \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = 0,\ \boldsymbol{p}_{vu} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n}_u = 0,\ \boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n}_v = 0$$

がわかる．したがって，

$$-\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_u = \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{n}, \qquad -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n}_u = \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{n}, \qquad -\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n}_v = \boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{n}$$

が成り立つ．そこで，

$$\begin{aligned} L &:= -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_u = \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{n}, \\ M &:= -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_v = -\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n}_u = \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{n}, \\ N &:= -\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n}_v = \boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{n} \end{aligned}$$

とおけば，曲面のの第二基本形式は

$$II := Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

と表される．$L, M, N$ を曲面の**第二基本量** (coefficients of the second fundamental form) とよぶ.

**注．** 次のことが知られている：
二つの曲面片が同じ基本不変量 $E, F, G$（第一基本量）と $L, M, N$（第二基本量）を持

てば，それらは，定義域の座標変換（パラメータ $u, v$ の変換）と，$\mathbf{R}^3$ の運動（回転と平行移動）により移りあう．（“曲面論の基本定理” からの帰結.）

第二基本形式を行列を使って，形式的に

$$II = (du\ dv)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

と表すこともできる．対称行列 $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ を**第二基本行列** (second fundamental matrix) をよぶ.

**例.** （平面） $\boldsymbol{p}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$ について，$\boldsymbol{p}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$E = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_u = 1, F = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v = 0, G = \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_v = 1$ である．また，$\boldsymbol{p}_{uu} = \mathbf{0}, \boldsymbol{p}_{uv} = \mathbf{0}, \boldsymbol{p}_{vv} = \mathbf{0}$ なので，$L = \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{n} = 0, M = \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{n} = 0, N = \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ である．（ち

なみに，$\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v}{\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．）

**例．**（円柱面）$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a\cos u \\ a\sin u \\ v \end{pmatrix}, (a > 0)$ について，$\boldsymbol{p}_u = \begin{pmatrix} -a\sin u \\ a\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので，$E = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_u = a^2, F = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v = 0, G = \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_v = 1$ である．また，$\boldsymbol{p}_{uu} = \begin{pmatrix} -a\cos u \\ -a\sin u \\ 0 \end{pmatrix}$ で，$\boldsymbol{p}_{uv} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{p}_{vv} = \boldsymbol{0}$ であり，$\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v = \begin{pmatrix} a\cos u \\ a\sin u \\ 0 \end{pmatrix}$ で $\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\| = a$ なので，$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから，$L = -a, M = 0, N = 0$ となる．

**例．**（球面） $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ a\cos u\sin v \\ a\sin u \end{pmatrix}$, $(a > 0, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, 0 \leqq v < 2\pi)$, について，

$\boldsymbol{p}_u = \begin{pmatrix} -a\sin u\cos v \\ -a\sin u\sin v \\ a\cos u \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_v = \begin{pmatrix} -a\cos u\sin v \\ a\cos u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$ であり，

$\boldsymbol{p}_{uu} = \begin{pmatrix} -a\cos u\cos v \\ -a\cos u\sin v \\ -a\sin u \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_{uv} = \begin{pmatrix} a\cos u\sin v \\ -a\cos u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_{vv} = \begin{pmatrix} -a\cos u\cos v \\ -a\cos u\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$

となる．また，$\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v}{\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|} = -\dfrac{1}{a}\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -\cos u\cos v \\ -\cos u\sin v \\ -\sin u \end{pmatrix}$ となるので，

$E = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_u = a^2,\ F = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v = 0,\ G = \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_v = a^2\cos^2 u$ となり，

$L = \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{n} = a,\ M = \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{n} = 0,\ N = \boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{n} = a\cos^2 u$ となる．

**例．**（一葉双曲面） $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a\cosh u\cos v \\ a\cosh u\sin v \\ a\sinh u \end{pmatrix}$ について，

$\boldsymbol{p}_u = \begin{pmatrix} a\sinh u\cos v \\ a\sinh u\sin v \\ a\cosh u \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_v = \begin{pmatrix} -a\cosh u\sin v \\ a\cosh u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$ なので，

$E = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_u = a^2\cosh(2u)$，$F = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v = 0$，$G = \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_v = a^2\cosh^2 u$ となる．

さらに，

$$\boldsymbol{p}_{uu} = \begin{pmatrix} a\cosh u\cos v \\ a\cosh u\sin v \\ a\sinh u \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_{uv} = \begin{pmatrix} -a\sinh u\sin v \\ a\sinh u\cos v \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_{vv} = \begin{pmatrix} -a\cosh u\cos v \\ -a\cosh u\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．

$\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v = \begin{pmatrix} -a^2\cosh^2 u\ \cos v \\ -a^2\cosh^2 u\ \sin v \\ a^2\sinh u\ \cosh u \end{pmatrix}$，$\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\| = a^2\cosh u\sqrt{\cosh(2u)}$ なので，

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{\cosh(2u)}} \begin{pmatrix} -\cosh u \, \cos v \\ -\cosh u \, \sin v \\ \sinh u \end{pmatrix}$$ となるから，

$$L = \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{a}{\sqrt{\cosh(2u)}}, \ M = \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \ N = \boldsymbol{p}_{vvv} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{a \cosh^2 u}{\sqrt{\cosh(2u)}}$$

を得る．

● ワインガルテン行列，ガウス曲率と平均曲率

第一基本行列の逆行列と第二基本行列の積

$$A := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix}$$

を**ワインガルテン行列** (Weingarten's matrix) あるいは**形作用素** (shape operator) とよぶ．

**定義．** 曲面のワインガルテン行列 $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ について

$$K := \det(A) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H := \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

とおき，$K$ を曲面の**ガウス曲率** (Gaussian curvature)，$H$ を曲面の**平均曲率** (mean curvature) とよぶ,

**演習．** (1) ワインガルテン行列 $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ について

$\det(A) = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$, $\dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(A) = \dfrac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$ となることを確かめよ.

(2) 半径 $a$ の球面 $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ a\cos u\sin v \\ a\sin u \end{pmatrix}$ の第一基本量 $E, F, G$ と第二基本量 $L, M, N$ を求め，さらにガウス曲率 $K = \det(A)$, 平均曲率 $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A)$ を求めよ.

**命題.** ワインガルテン行列の固有値はすべて実数である.

証明はこの回の講義ノートの最後に書いてある.

**定義.** 曲面のワインガルテン行列 $A$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ を曲面の**主曲率** (principal curvature) とよぶ．また，それぞれに対する固有ベクトルの方向を**主方向** (principal direction) とよぶ.

このとき，$A$ の固有多項式 $\det(tI - A)$ は $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$ に等しいので，比較して，

$$K = \lambda_1\lambda_2, \quad H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

を得る．つまり，ガウス曲率は主曲率の積であり，平均曲率は主曲率の平均である．

● 第二基本形式の正の座標変換（向きを保つ座標変換）での不変性

座標変換によって単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は正負の符号を除いて不変である．

座標変換 $u = u(\xi, \eta), v = v(\xi, \eta)$ について，そのヤコビ行列式

$$J := \det \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} = u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi$$

が正である座標変換を**正の座標変換** (positive coordinate transformation) あるいは**向きを保つ座標変換** (orientation preserving coordinate transformation) とよぶ．また，ヤコビ行列式が負である座標変換を**負の座標変換** (negative coordinate transformation)

あるいは**向きを逆にする座標変換** (orientation reversing coordinate transformation) とよぶ.

**補題.** $\boldsymbol{p}_\xi \times \boldsymbol{p}_\eta = J\, \boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$ が成り立つ．したがって，

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_\xi \times \boldsymbol{p}_\eta\|}\boldsymbol{p}_\xi \times \boldsymbol{p}_\eta = \pm\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|}\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$$

が成り立つ．ただし，$J > 0$ のとき $+$，$J < 0$ のとき $-$ である．

とくに，正の座標変換によって単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は不変である．

**証明.** 連鎖律により，$\boldsymbol{p}_\xi = \boldsymbol{p}_u u_\xi + \boldsymbol{p}_v v_\xi$ であり $\boldsymbol{p}_\eta = \boldsymbol{p}_u u_\eta + \boldsymbol{p}_v v_\eta$ なので，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_\xi \times \boldsymbol{p}_\eta &= (\boldsymbol{p}_u u_\xi + \boldsymbol{p}_v v_\xi) \times (\boldsymbol{p}_u u_\eta + \boldsymbol{p}_v v_\eta) \\
&= \boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_u u_\xi u_\eta + \boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v u_\xi v_\eta + \boldsymbol{p}_v \times \boldsymbol{p}_u v_\xi u_\eta + \boldsymbol{p}_v \times \boldsymbol{p}_v v_\xi v_\eta \\
&= \boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v u_\xi v_\eta - \boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v u_\eta v_\xi \\
&= \boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v (u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi) \\
&= (\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v) J \\
&= J(\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v)
\end{aligned}$$

と計算される．よって，

$$\|\boldsymbol{p}_\xi \times \boldsymbol{p}_\eta\| = |J|\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|$$

となり，

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_\xi \times \boldsymbol{p}_\eta\|}\boldsymbol{p}_\xi \times \boldsymbol{p}_\eta = \frac{J}{|J|}\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|}\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$$

を得る．とくに，$J > 0$ であれば，$|J| = J$ なので，

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_\xi \times \boldsymbol{p}_\eta\|}\boldsymbol{p}_\xi \times \boldsymbol{p}_\eta = \frac{1}{\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|}\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$$

であり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は正の座標変換で不変であることがわかる．

$J < 0$ であれば，$|J| = -J$ なので，

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_\xi \times \boldsymbol{p}_\eta\|}\boldsymbol{p}_\xi \times \boldsymbol{p}_\eta = -\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|}\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$$

となる． □

正の座標変換によって単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は不変に定まり，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{n}$ を決めれば，$II = -d\boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{n}$ が決まるので，第二基本形式は正の座標変換に関して不変であることがわかる．そして，その「成分」である第二基本量は座標変換によって次のように変換される：

**補題．** 座標変換 $u = u(\xi, \eta), v = v(\xi, \eta)$ により，曲面を表す $u, v$ の式 $\boldsymbol{p}(u, v)$ が $\xi, \eta$ を使って $\boldsymbol{p}(\xi, \eta)$ を表されるとき，$L, M, N$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\widetilde{L} &= -\boldsymbol{p}_\xi \cdot \boldsymbol{n}_\xi = Lu_\xi^2 + 2Mu_\xi v_\xi + Nv_\xi^2 \\
\widetilde{M} &= -\boldsymbol{p}_\xi \cdot \boldsymbol{n}_\eta = Lu_\xi u_\eta + M(u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi) + Nv_\xi v_\eta \\
\widetilde{N} &= -\boldsymbol{p}_\eta \cdot \boldsymbol{n}_\eta = Lu_\eta^2 + 2Mu_\eta v_\eta + Nv_\eta^2
\end{aligned}$$

で与えられる．

**証明.** たとえば，$\widetilde{M}$ について調べると，

$$
\begin{aligned}
\widetilde{M} &= -\boldsymbol{p}_\xi \cdot \boldsymbol{p}_\eta \\
&= -(\boldsymbol{p}_u u_\xi + \boldsymbol{p}_v v_\xi) \cdot (\boldsymbol{n}_u u_\eta + \boldsymbol{n}_v v_\eta) \\
&= (-\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_u) u_\xi u_\eta + (-\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{n}_v) u_\xi v_\eta + (-\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n}_u) v_\xi u_\eta + (-\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{n}_v) v_\xi v_\eta \\
&= L u_\xi u_\eta + M u_\xi v_\eta + M v_\xi u_\eta + N v_\xi v_\eta \\
&= L u_\xi u_\eta + M (u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi) + N v_\xi v_\eta
\end{aligned}
$$

他の計算も同様にできる． □

上の補題の座標変換の公式を行列を使って表すと，

$$
\begin{pmatrix} \widetilde{L} & \widetilde{M} \\ \widetilde{M} & \widetilde{N} \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}
$$

となる．また，第一基本量については，

$$
\begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}
$$

である..

座標変換により,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{L} & \widetilde{M} \\ \widetilde{M} & \widetilde{N} \end{pmatrix}$$

との間に，ワインガルテン行列の変換公式

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

が成り立つ．実際,

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix}^{-1} {}^t \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}^{-1} {}^t \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる.

**系．** $\det(\widetilde{A}) = \det(A)$, $\mathrm{tr}(\widetilde{A}) = \mathrm{tr}(A)$ が成り立つ．

次のことがわかる：

**命題．** ガウス曲率 $K$ と平均曲率 $H$ は，曲面の定義域の正の座標変換で不変である．負の座標変換では，ガウス曲率は不変で，平均曲率はその符号を変える．

**命題．** ガウス曲率 $K$ と平均曲率 $H$ は運動（回転と平行移動）で不変である，さらにガウス曲率は一般の合同変換で不変である．

---

● 付録

次の命題の証明を与える．

**命題．** ワインガルテン行列の固有値はすべて実数である．

証明のために，線形代数に関する一般的な結果を説明していく．

**補題．** $B$ が正則な $n$ 次対称行列（${}^tB = B$）ならば，逆行列 $B^{-1}$ も対称行列である．

**証明．** ${}^t(B^{-1}) = B^{-1}$ を示す．

$$\begin{aligned} {}^t(B^{-1})B &= {}^t(B^{-1})^tB = {}^t(BB^{-1}) = {}^tI = I, \\ B^t(B^{-1}) &= {}^tB^t(B^{-1}) = {}^t(B^{-1}B) = {}^tI = I \end{aligned}$$

であるから，${}^t(B^{-1})$ は $B$ の逆行列である． □

**補題．** 実対称行列 $B$ の固有値はすべて実数である．

**証明．** $\lambda$ を $B$ の（一般には複素数の）固有値とし，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{x} \neq 0$ を固有ベクトルと

する：$B\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ である．このとき，

$$ {}^t(B\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t(\lambda\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{x}} = \lambda {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = \lambda\|\boldsymbol{x}\|^2 $$

であり

$$ {}^t(B\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{x}} = ({}^t\boldsymbol{x}\,{}^tB)\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t\boldsymbol{x}\,B\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{B\boldsymbol{x}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2 $$

なので，$\overline{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2 = \lambda\|\boldsymbol{x}\|^2$ が成り立つ．$\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ なので，$\overline{\lambda} = \lambda$ となり，$\lambda$ が実数であることがわかる． □

**補題．** 実対称行列は直交行列により対角化できる．つまり，実対称行列 $B$ に対して，直交行列 $P$ （$P$ は実正則行列で ${}^tP = P^{-1}$）が存在して，$P^{-1}BP$ は対角行列となる．

証明は線形代数学の教科書を参照せよ．（たとえば，佐武一郎 著「線型代数学」p.160, 定理 4，あるいは，石川剛郎 他著「線形写像と固有値」p.85, 定理 4.8.）

**補題．** 実対称行列 $B$ が正定値（つまり，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ に対して，${}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x} > 0$）ならば，$B$ のすべての固有値は正である．

**証明．** $B$ は実対称行列だから，直交行列 $P$ が存在して，

$$P^{-1}BP = {}^tPBP \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

であり，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は $B$ の固有値である．（ただし，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は相異なるとは限らない）．$P$ は直交行列だから，${}^tP = P^{-1}$ であることに注意する．

このとき，

$${}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tP\Lambda P\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{x})\Lambda(P\boldsymbol{x})$$

である．$i = 1, 2, \ldots, n$ について，基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ （第 $i$ 成分だけが 1 で他は 0）に対して，$\boldsymbol{x} = P^{-1}\boldsymbol{e}_i$ とおけば，${}^t\boldsymbol{e}_iB\boldsymbol{e}_i = \lambda_i$ は正数であることがわかる． □

**補題．** $B$ が正値実対称行列であり，$C$ が実対称行列ならば，$A = B^{-1}C$ の固有値は正である．

**証明．** 直交行列 $P$ について，

$$P^{-1}BP = {}^tPBP \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

であり，$\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ とする．このとき，

$$P^{-1}B^{-1}P = \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

であり，$B^{-1} = P\Lambda^{-1}P^{-1}$ であり，$B^{-1}C = P\Lambda^{-1}P^{-1}C$ である．ここで，

$$R := P \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\frac{1}{\lambda_n}} \end{pmatrix} P^{-1}$$

とおけば，$R^2 = P\Lambda^{-1}P^{-1} = B^{-1}$ であり，

$$R^{-1}(B^{-1}C)R = R^{-1}R^2CR = RCR$$

は対称行列であり，固有値はすべて実数となる．したがって，$A = B^{-1}C$ の固有値もすべて実数となる． □

以上により，ワインガルテン行列の固有値はすべて実数であることがわかる． □