

【 幾何学 3 : 曲線と曲面の幾何学 】

2025年度前期

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

● 授業計画

1. 平面曲線
2. 平面曲線の性質
3. 空間曲線
4. 曲面とは何か
5. 第一基本形式
6. 第二基本形式
7. 主方向と漸近方向
8. 測地線とガウス・ボンネの定理
9. 曲面の位相
10. 微分形式
11. ガウス・ボンネの定理 (多様体の場合)
12. 期末テスト
13. 幾何学の世界

● 教科書は使用しない.

参考書

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)」裳華房 (1995).

梅原雅顕, 山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」裳華房 (2015).

宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」岩波書店 (2019).

5. 第一基本形式

● 関数の外微分

2 変数関数 $f(u, v)$ を考える. uv -平面上の曲線 $(u(t), v(t))$ に沿って, 関数 $f(u, v)$ の変化を見ると, 微分積分学で学んだように, t の関数 $f(u(t), v(t))$ について, 合成関数の微分法則から

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = f_u(u(t), v(t)) \frac{du(t)}{dt} + f_v(u(t), v(t)) \frac{dv(t)}{dt} \dots\dots\dots (*)$$

が成り立つ. この式を簡単に書けば,

$$\frac{df}{dt} = f_u \frac{du}{dt} + f_v \frac{dv}{dt}$$

となる. ただし, 左辺の f は $u = u(t), v = v(t)$ を代入して t の関数だとみなしたものであり, 右辺の f_u や f_v は f を偏微分してから $u = u(t), v = v(t)$ を代入しているこ

とに注意する.

ここで, uv -平面上の関数 (u 座標関数) $(u, v) \mapsto u$ について, uv -平面上の曲線 $(u(t), v(t))$ に対して, $\frac{du(t)}{dt} = u'(t)$ を対応させる「機能」に注目して, それを du で表すことにする. (言い換えれば, uv -平面上の運動に対して, u 方向の速度だけを出力する“速度計”である.)

同様に, uv -平面上の曲線 $(u(t), v(t))$ に対して, $\frac{dv(t)}{dt} = v'(t)$ を対応させる「機能」を dv で表す.

さらに, uv -平面上の曲線 $(u(t), v(t))$ に対して, 曲線に沿った関数 $f(u(t), v(t))$ の微分 $\frac{df}{dt}$ を対応させる「機能」を df で表すことにする.

すると, それらの「機能」の間の関係式として,

$$df = f_u du + f_v dv$$

を得る. この式から, 合成関数の微分法則 (*) が容易に想起することができる.

形式 df は f の外微分 (exterior differential) あるいは 全微分 (total differential) とよばれる. もちろん du は座標関数 u の外微分であり, dv は座標関数 v の外微分であ

る. この式の表示は形式的な式だとも思えるが, 実は, 「多様体論」によって, 接ベクトル (tangent vector) や余接ベクトル (cotangent vector) の考え方で数学的に正しく定式化できて, 外微分形式の理論が展開されるのである.

注. 外微分 df は座標変換に関して不変である. すなわち, 座標変換 $u = u(\xi, \eta), v = v(\xi, \eta)$ について,

$$df = f_u du + f_v dv = f_\xi d\xi + f_\eta d\eta$$

が成り立つ. 実際, f の代わりに u をあてはめて, $du = u_\xi d\xi + u_\eta d\eta$ であり, f の代わりに v にあてはめて $dv = v_\xi d\xi + v_\eta d\eta$ となるから,

$$\begin{aligned} f_u du + f_v dv &= f_u(u_\xi d\xi + u_\eta d\eta) + f_v(v_\xi d\xi + v_\eta d\eta) \\ &= (f_u u_\xi + f_v v_\xi) d\xi + (f_u u_\eta + f_v v_\eta) d\eta \\ &= f_\xi d\xi + f_\eta d\eta \end{aligned}$$

となる. 最後の等式では, 合成関数の微分法則 (連鎖率, chain rule) を使った.

補題. 関数の外微分に関して次が成り立つ.

$$d(f + g) = df + dg, \quad d(fg) = gdf + fdg, \quad d(\varphi(f)) = \frac{d\varphi}{dw}(f)df.$$

ただし, $f = f(u, v), g = g(u, v), \varphi = \varphi(w)$ であり, $\varphi(f)$ は $\varphi(w)$ に $w = f(u, v)$ を代入したもの (合成関数) である.

上の第 2 式だけを示してみよう. 連鎖率を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} d(fg) &= (fg)_u du + (fg)_v dv \\ &= (f_u g + f g_u) du + (f_v g + f g_v) dv \\ &= (f_u g \, du + f_v g \, dv) + (f g_u \, du + f g_v \, dv) \\ &= g(f_u du + f_v dv) + f(g_u du + g_v dv) \\ &= gdf + fdg \end{aligned}$$

を得る.

例. $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ とし, D 上の微分可能な関数 $f(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$ について計算してみる.

$$f_u = \frac{\partial}{\partial u}(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2u = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

であり,

$$f_v = \frac{\partial}{\partial v}(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2v = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

なので,

$$df = f_u du + f_v dv = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} du + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} dv$$

となる. 一方, 極座標 (r, θ) , ただし

$$u = r \cos \theta, \theta = r \sin \theta$$

で表すと, r, θ の関数として $f = r$ を表されるから, $df = dr$ となる.

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \theta = \arctan \frac{v}{u}$$

なので, u, v の関数として,

$$df = dr = r_u du + r_v dv = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} du + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} dv$$

という具合に (座標変換してから外微分しても) 同じ式を得るので, この場合の座標不変性が確かめられる.

● 第一基本形式

曲面 $\mathbf{p}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ の上の曲線 $\mathbf{p}(u(t), v(t)) = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix}$ を考える. (曲面上を “質点” が運動している状況をイメージするとよい.) この (助変数表示された) 曲線の t -微分 (速度ベクトル) は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(u(t), v(t)) = \begin{pmatrix} x_u u_t + x_v v_t \\ y_u u_t + y_v v_t \\ z_u u_t + z_v v_t \end{pmatrix}$$

となり，その長さの 2 乗は次のように計算される：

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{p}(u(t), v(t)) \right\|^2 &= (x_u u_t + x_v v_t)^2 + (y_u u_t + y_v v_t)^2 + (z_u u_t + z_v v_t)^2 \\
 &= (x_u^2 u_t^2 + 2x_u x_v u_t v_t + x_v^2 v_t^2) + (y_u^2 u_t^2 + 2y_u y_v u_t v_t + y_v^2 v_t^2) \\
 &\quad + (z_u^2 u_t^2 + 2z_u z_v u_t v_t + z_v^2 v_t^2) \\
 &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) u_t^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) u_t v_t \\
 &\quad + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) v_t^2 \\
 &= (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u) u_t^2 + 2(\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v) u_t v_t + (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v) v_t^2
 \end{aligned}$$

($\cdot$ は内積である.) なお，この計算は，

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(u(t), v(t)) = \begin{pmatrix} x_u u_t + x_v v_t \\ y_u u_t + y_v v_t \\ z_u u_t + z_v v_t \end{pmatrix} = \mathbf{p}_u u_t + \mathbf{p}_v v_t$$

と表し，内積の分配則から

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{p}(u(t), v(t)) \right\|^2 &= (\mathbf{p}_u u_t + \mathbf{p}_v v_t) \cdot (\mathbf{p}_u u_t + \mathbf{p}_v v_t) \\
 &= (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u) u_t^2 + 2(\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v) u_t v_t + (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v) v_t^2
 \end{aligned}$$

としても計算できる．ここで，列ベクトルのスカラー倍を（通常は左からのところを）右から掛けて書いている箇所があるが， 3×1 型行列と 1×1 型行列の積とすれば整合性のある適切な書き方となっている．

そこで，助変数表示された空間曲面 $\mathbf{p}(u, v)$ に対して，

$$E = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u, \quad F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v, \quad G = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v$$

について，形式

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

を第一基本形式 (first fundamental form) とよび， E, F, G を第一基本量 (coefficients of first fundamental form) とよぶ．

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

と書くこともある．

第一基本形式を行列を使って表示すれば,

$$ds^2 = (du \ dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

と表すこともできる.

ちなみに, 曲面上で $\mathbf{p}_u$ と $\mathbf{p}_v$ が張る平面 (接平面) のベクトル $\mathbf{p}_u h + \mathbf{p}_v k, (h, k \in \mathbf{R})$ の長さの 2 乗を計算すると,

$$(\mathbf{p}_u h + \mathbf{p}_v k) \cdot (\mathbf{p}_u h + \mathbf{p}_v k) = Eh^2 + 2Fhk + Gk^2$$

となる.

対称行列 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ の固有値はすべて正の実数となり, とくに正則行列である. この行列を第一基本行列 (first fundamental matrix) とよぶ.

注. ds^2 は, 曲面の接空間上の内積 (計量) を表している. なお, 左辺の ds は

$\left\| \frac{d}{dt} \mathbf{p}(u(t), v(t)) \right\|$ に付随する微分形式, という意味合いで使われているが, 単に古典的に常用されている形式的な記号として ds^2 を「かたまり」として用いるとよい.

例. 関数 $z = f(x, y)$ のグラフについては, $((u, v)$ の代わりに) x, y を助変数にとって,

$$\mathbf{p}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

と表示される. このとき,

$$\mathbf{p}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$$

なので,

$$E = \mathbf{p}_x \cdot \mathbf{p}_x = 1 + f_x^2, \quad F = \mathbf{p}_x \cdot \mathbf{p}_y = f_x f_y, \quad G = \mathbf{p}_y \cdot \mathbf{p}_y = 1 + f_y^2$$

である． よって， 第一基本行列は

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}$$

であり， 第一基本形式は

$$ds^2 = (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2)dy^2$$

である．

□

例． (球面) 球面の第一基本形式を計算する． $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a \cos u \cos v \\ a \cos u \sin v \\ a \sin u \end{pmatrix}$ と表示される．

$$\mathbf{p}_u = \begin{pmatrix} -a \sin u \cos v \\ a \sin u \sin v \\ a \cos u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_v = \begin{pmatrix} -a \cos u \sin v \\ a \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$E = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u = a^2, \quad F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v = 0, \quad G = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v = a^2 \cos^2 u$$

となる. したがって, 球面の第一基本形式は $a^2 du^2 + a^2 \cos^2 u dv^2$ となる.

例題. (一葉双曲面, $a = b = c$) $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} a \cosh u \cos v \\ a \cosh u \sin v \\ a \sinh u \end{pmatrix}$ と表示される. ただし,
 $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ である. 第一基本形式を計算せよ.

補題. (1) 2 次の実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ について, A の固有値がすべて正の実数である必要十分条件は

$$a > 0 \text{ かつ } c > 0 \text{ かつ } ac - b^2 > 0$$

である.

証明. A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -b & t-c \end{vmatrix} &= (t-a)(t-c) - b^2 \\ &= t^2 - (a+c)t + ac - b^2 \\ &= \left(t - \frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} + b^2 + \frac{c^2}{4}\right) \end{aligned}$$

である. 特に固有値 (固有方程式の解) は実数であることがわかる. 固有値を λ_1, λ_2 とする. 解と係数の関係から,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + c, \quad \lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2$$

である.

λ_1, λ_2 が正の実数とすると,

$$a + c > 0, \quad ac - b^2 > 0$$

となる. $ac > b^2 \geq 0$ なので, a, c は同符号だから,

$$a > 0, c > 0, ac - b^2 > 0$$

となる.

逆に $a > 0, c > 0, ac - b^2 > 0$ とすると, $\lambda_1 + \lambda_2 > 0, \lambda_1 \lambda_2 > 0$ となる. $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ から λ_1, λ_2 は同符号で, $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ から $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ となる. $\square$

定理. 第一基本行列 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正の実数となる.

証明. $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ は一次独立なので, 特に, 零ベクトルではない. よって,

$$E = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u > 0, \quad G = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v > 0$$

である. さらにラグランジュの恒等式により,

$$EG - F^2 = (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u)(\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v) - (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v)^2 = \|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\|^2 > 0$$

となる. したがって, 上の補題より, 第一基本行列の固有値はすべて正の実数となる.

□

● 第一基本形式の座標不変性

空間曲面 $\mathbf{p}(u, v)$ に対して, その外微分を

$$d\mathbf{p} := \mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} du + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} dv = \begin{pmatrix} x_u du + x_v dv \\ y_u du + y_v dv \\ z_u du + z_v dv \end{pmatrix}$$

により定義する. すると, 表示

$$ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p}$$

を得る.

変数変換 $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$ をすると,

$$du = u_\xi d\xi + u_\eta d\eta, \quad dv = v_\xi d\xi + v_\eta d\eta$$

と表されるので，計算すると，

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv = \mathbf{p}_\xi d\xi + \mathbf{p}_\eta d\eta$$

がわかる．したがって，

$$ds^2 = (\mathbf{p}_\xi d\xi + \mathbf{p}_\eta d\eta) \cdot (\mathbf{p}_\xi d\xi + \mathbf{p}_\eta d\eta) = (\mathbf{p}_\xi \cdot \mathbf{p}_\xi) d\xi^2 + 2(\mathbf{p}_\xi \cdot \mathbf{p}_\eta) d\xi d\eta + (\mathbf{p}_\eta \cdot \mathbf{p}_\eta) d\eta^2$$

となるので，

$$\tilde{E} = \mathbf{p}_\xi \cdot \mathbf{p}_\xi, \quad \tilde{F} = \mathbf{p}_\xi \cdot \mathbf{p}_\eta, \quad \tilde{G} = \mathbf{p}_\eta \cdot \mathbf{p}_\eta,$$

とおくと，座標系 (ξ, η) に関する第一基本形式は

$$ds^2 = \tilde{E} d\xi^2 + 2\tilde{F} d\xi d\eta + \tilde{G} d\eta^2$$

と表される．第一基本行列は

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

となる. ただし, $\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$ は座標変換 $u = u(\xi, \eta), v = v(\xi, \eta)$ のヤコビ行列である.

例. 関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, ((x, y) \neq (0, 0))$ のグラフで表される曲面の第一基本形式は, 助変数 (x, y) について,

$$ds^2 = \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2} dx^2 + \frac{2xy}{x^2 + y^2} dx dy + \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} dy^2$$

となる. また, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ において, 極座標 (r, θ) で表せば,

$$ds^2 = 2dr^2 + r^2 d\theta^2$$

となる.

● 面積と第一基本形式

uv 平面領域 D で $\mathbf{p}(u, v)$ により定められた曲面の面積 (曲面積) は, 重積分

$$A := \iint_D \|\mathbf{p}_u(u, v) \times \mathbf{p}_v(u, v)\| du dv$$

により与えられる.

$$dA := \|\mathbf{p}_u(u, v) \times \mathbf{p}_v(u, v)\| du dv$$

とおき, 面積要素 (area element) とよぶ.

ラグランジュの恒等式により,

$$\|\mathbf{p}_u(u, v) \times \mathbf{p}_v(u, v)\|^2 = (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u)(\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v) - (\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v)^2 = EG - F^2$$

であるから, 面積要素は第一基本量を使って

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

と表される.

例. (トーラスの曲面積) $0 < b < a$ に対して,

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{pmatrix} (a + b \cos u) \cos v \\ (a + b \cos u) \sin v \\ b \sin u \end{pmatrix}$$

$(0 \leq u, v < 2\pi)$ はトーラスを表す. このトーラスの面積を計算する.

$$\mathbf{p}_u = \begin{pmatrix} -b \sin u \cos v \\ -b \sin u \sin v \\ b \cos u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_v = \begin{pmatrix} -(a + b \cos u) \sin v \\ (a + b \cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので,

$$E = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u = b^2, \quad F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v = 0, \quad G = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v = (a + b \cos u)^2$$

と計算できる. したがって, $EG - F^2 = b^2(a + b \cos u)^2$ となり, $a + b \cos u > 0$ に注意すると, $\sqrt{EG - F^2} = b(a + b \cos u)$ となるので, 面積要素は

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv = b(a + b \cos u) du dv$$

となる. したがって, $D : 0 \leq u, v < 2\pi$ として計算すれば, 求める面積は

$$\iint_D b(a + b \cos u) du dv = \int_{v=0}^{v=2\pi} [b(au + b \sin u)]_{u=0}^{u=2\pi} dv = 4\pi^2 ab$$

となる.