【 幾何学 3： 曲線と曲面の幾何学 】

２０２５年度前期

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

● 授業計画

1．平面曲線　2．平面曲線の性質　3．空間曲線　4．曲面とは何か　5．第一基本形式　6．第二基本形式　7．主方向と漸近方向　8．測地線とガウス・ボンネの定理　9．曲面の位相　10．微分形式　11．ガウス・ボンネの定理（多様体の場合）　12．期末テスト　13．幾何学の世界

● 教科書は使用しない．

参考書

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)」裳華房 (1995).

梅原雅顕，山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」裳華房 (2015).

宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」岩波書店 (2019).

4. 曲面とは何か

● 2 変数関数のグラフ

xy-平面上の領域 D の上で定義された関数（2 変数関数）$z = f(x, y)$ に対して，$\mathbf{R}^3$ の部分集合（“曲面”）

$$\Gamma_f := \{(x, y, z)) \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y))) \mid (x, y) \in D\}$$

を $z = f(x, y)$ の**グラフ** (graph) とよぶ.

例. $f(x, y) = ax + by + c$ （a, b, c は定数）のグラフは平面である.

例. 定数 $a > 0, b > 0$ について，

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

のグラフを**楕円放物面** (elliptic paraboloid) とよぶ．特に $a = b$ のとき**回転放物面** (paraboloid of revolution) とよぶ.

例. 定数 $a > 0, b > 0$ について,

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

のグラフを**双曲放物面** (hyperbolic paraboloid) とよぶ.

● 陰関数 $F(x, y, z) = 0$ で表される曲面

曲面を 3 変数関数 $F(x, y, z)$ について方程式 $F(x, y, z) = 0$ で定める場合もある.

例. 定数 a, b, c, d ただし $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ について,

$$ax + by + cz + d = 0$$

は平面を表す．

例． $a > 0, b > 0, c > 0$ について，方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

あるいは，同じことだが，

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

で表される曲面を**楕円面** (ellipsoid) とよぶ．特に，$a = b$ のときは，xz 平面上の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ を z 軸のまわりに回転させてできる**回転楕円面** (ellipsoid of revolution) となる．さらに $a = b = c$ ならば，半径 a の球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

を表す．

例． $a > 0, b > 0, c > 0$ について，方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

で表される曲面を**一葉双曲面** (hyperboloid of one sheet) とよぶ．

例． $a > 0, b > 0, c > 0$ について，方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

で表される曲面を**二葉双曲面** (hyperboloid of two sheets) とよぶ．

例． $a > 0$ に対して，方程式

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + a^2(x^2 + y^2 - z^2) = 0$$

は，xyz-空間内の zx-平面上のレムニスケート

$$(z^2 + x^2)^2 - a^2(z^2 - x^2) = 0$$

すなわち

$$(x^2+z^2)^2+a^2(x^2-z^2)=0$$

を z 軸のまわりに回転してできる曲面（x^2 のところに x^2+y^2 を代入して定まる曲面）を定める．この曲面（回転レムニスケート）は，原点ではなめらかな曲面ではなくなり，くびれた形をしている．

簡単のため，$F(x,y,z)$ は無限回偏微分可能（つまり C^∞ 級），たとえば，x,y,z の多項式，とする．方程式 $F(x,y,z)=0$ で表される曲面について，

$$F_x(x_0,y_0,z_0)=0,\ F_y(x_0,y_0,z_0)=0,\ F_z(x_0,y_0,z_0)=0$$

となる曲面上の点 (x_0,y_0,z_0) は曲面の**特異点** (singular point) とよばれる．（ここで，条件 $F(x_0,y_0,z_0)=0$ は大前提として課せられていることに注意.）

例. 回転レムニスケート $(x^2+z^2)^2+a^2(x^2-z^2)=0$ 上の原点 $(0,0,0)$ は特異点である.

特異点でない点を**正則点** (regular point) とよぶ．正則点では，曲面は交差のないなめらかな形をしている．たとえば，$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ならば，**陰関数定理**により，曲面は点 (x_0, y_0, z_0) の近くで，なめらかな関数 $z = f(x, y)$ のグラフとして表すことができる．

● 助変数表示された曲面

助変数 (媒介変数，パラメータ，parameter) を使って曲面を表すこともできる．下の例では，uv-平面の領域 D の上を点 (u, v) が動くときにできる軌跡として曲面が定まる．

例． 楕円面： $x = a\cos u\cos v,\ y = b\cos u\sin v,\ z = c\sin u,$
$D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, 0 \leqq v < 2\pi\}.$

例． 一葉双曲面： $x = a\cosh u\cos v,\ y = b\cosh u\sin v,\ z = c\sinh u,$
$D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqq v < 2\pi\}.$

例． 二葉双曲面の上側： $x = a\sinh u\cos v,\ y = b\sinh u\sin v,\ z = c\cosh u,$
$D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqq v < 2\pi\}.$

例． 回転レムニスケート：

$$x = \frac{a\sin u\cos u\sin v}{1+\sin^2 u},\ y = \frac{a\sin u\cos u\cos v}{1+\sin^2 u},\ z = x = \frac{a\cos u}{1+\sin^2 u},$$

$D = \{(u, v) \mid 0 \leqq u \leqq \pi, 0 \leqq v < 2\pi\}.$

2 変数関数を 3 つひとまとめにして，曲面を位置ベクトルの形

$$\boldsymbol{p}(u, v) = {}^t(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

で表すことにする．このとき，1 つのベクトル

$$\boldsymbol{p}_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

が一次独立となる点を**正則点** (regular point) とよび，一次従属となる点を**特異点** (singular point) という．陰関数 $F(x, y, z) = 0$ で表される曲面の特異点のときと同様に，助変数表示された曲面においても，特異点の近くでは $\boldsymbol{p}(u, v)$ がなめらかな曲面を表さない場合がある．

例． 回転レムニスケート：

$$x = \frac{a \sin u \cos u \sin v}{1 + \sin^2 u}, \ y = \frac{a \sin u \cos u \cos v}{1 + \sin^2 u}, \ z = x = \frac{a \cos u}{1 + \sin^2 u},$$

$D = \{(u, v) \mid 0 \leqq u \leqq \pi, 0 \leqq v < 2\pi\}$，においては，$u = \frac{\pi}{2}$ となる点 $(\frac{\pi}{2}, v)$ では，$\boldsymbol{p}_u = 0, \boldsymbol{p}_v = 0$ となり（助変数表示された曲面としても）特異点となる．

(u,v) が uv-平面の領域 D を動くとき，各 $(u,v) \in D$ において $\boldsymbol{p}_u(u,v), \boldsymbol{p}_v(u,v)$ が一次独立であるような（助変数表示された）曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ を領域 D 上の**正則曲面** (regular surface) という．

以降とくに断らない限り，曲面といえば，すべて正則曲面を指すものとする．なお，研究対象となる曲面を助変数表示できるのはあくまで曲面の一部である場合が多いので，領域 D を必要があれば小さくとって助変数表示された曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ を調べる場合，**曲面片** (piece of surface) という用語を使うことにする．

例． D 上の 2 変数関数 $f(u,v)$ に対して，$\boldsymbol{p}(u,v) = {}^t(u, v, f(u,v))$ とおくと，$\boldsymbol{p}(u,v)$ は関数 $z = f(x,y)$ のグラフを表す．$\boldsymbol{p}_u(u,v) = {}^t(1, 0, f_u(u,v)), \boldsymbol{p}_v = {}^t(0, 1, f_v(u,v))$ は（D のすべての点 (u,v) で）一次独立なので，正則曲面である．

助変数表示された曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ において，v を 1 つ固定させて u だけ動かしてできる対応 $u \mapsto \boldsymbol{p}(u,v)$ で決まる曲面上の曲線を u 曲線，u を 1 つ固定させて v だけ動かしてできる対応 $v \mapsto \boldsymbol{p}(u,v)$ で決まる曲面上の曲線を v 曲線という．ベクトル $\boldsymbol{p}_u(u,v)$

は u 曲線の各点での速度ベクトルを表し，$\boldsymbol{p}_v(u,v)$ は v 曲線の各点での速度ベクトルを表す．また，点 (u,v) で曲面に接するベクトルは，$\boldsymbol{p}_u$ と $\boldsymbol{p}_v$ の一次結合で表される．点 $\boldsymbol{p}(u,v)$ を通りこれらの接ベクトル $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ に平行な平面

$$\{\boldsymbol{p}(u,v) + s\boldsymbol{p}_u(u,v) + t\boldsymbol{p}_v(u,v) \mid s,t \in \mathbf{R}\}$$

は曲面の点 $\boldsymbol{p}(u,v)$ での**接平面** (tangent plane) となる．また，$\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ の両方に直交し，次の式で表される単位ベクトル

$$\boldsymbol{n} := \frac{\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v}{|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|}$$

は，曲面の**単位法線ベクトル** (unit normal vector) となる．ここで，$\times$ はベクトル積（外積，クロス積）を表す．

注． 一般に $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，**内積** (inner product) と**ベクトル積**は次で

与えられる：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}:=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}:=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

このとき，次の式が成り立つ．

$$|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$

が成り立つ．（後半の等式は，**ラグランジュの恒等式**とよばれる．）$\|\boldsymbol{a}\| = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a_1^2+a_2^2+a_3^2$ を考慮して計算すれば直接に検証される．

一般に，与えられた曲面の全体を 1 つの助変数表示でカバーできるとは限らない．複数の表示が必要な場合が多いし，複数の表示を使った方がわかりやすいこともある．（こ

の地球上の全世界を 1 つの平面的な地図では表せない．だから（地球儀があり）「世界地図帳」がある．）

曲面の 1 つずつの表示 $\boldsymbol{p}(u,v)$ の助変数の対 (u,v) を曲面の**局所座標系** (system of local coordinates, local coordinate system) とよび，助変数をとりかえる操作を**座標変換** (transformation of coordinates, coordinate transformation) とよぶ．しかし，単位法線ベクトルは，座標変換に関して符号を除いて変わらずに定まる．

● 曲面の面積

uv 平面領域 D で $\boldsymbol{p}(u,v)$ により定められた曲面の面積（曲面積）は，重積分

$$A := \iint_D \|\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)\| dudv$$

により与えられる．重積分の変換公式から，これが助変数表示によらないことがわかる．

とくに，グラフ $z = f(x,y)((x,y) \in D)$ で表される曲面の面積は

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy$$

で与えられる．実際，この場合，$\boldsymbol{p}_x(x,y) = {}^t(1, 0, f_x(x,y)), \boldsymbol{p}_y = {}^t(0, 1, f_y(x,y))$ なので，

$$\|\boldsymbol{p}_x(x,y)\times\boldsymbol{p}_y(x,y)\| = \sqrt{\{-f_x(x,y)\}^2 + \{-f_y(x,y)\}^2 + 1} = \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}$$

であるから，

$$A = \iint_D \|\boldsymbol{p}_x(x,y) \times \boldsymbol{p}_y(x,y)\|dxdy = \iint_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}dxdy$$

が成り立つ．