

【 幾何学 3 : 曲線と曲面の幾何学 】

2025年度前期

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

● 授業計画

1. 平面曲線
2. 平面曲線の性質
3. 空間曲線
4. 曲面とは何か
5. 第一基本形式
6. 第二基本形式
7. 主方向と漸近方向
8. 測地線とガウス・ボンネの定理
9. 曲面の位相
10. 微分形式
11. ガウス・ボンネの定理 (多様体の場合)
12. 期末テスト
13. 幾何学の世界

● 教科書は使用しない.

参考書

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)」裳華房 (1995).

梅原雅顕, 山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」裳華房 (2015).

宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」岩波書店 (2019).

3. 空間曲線

● 空間曲線の曲率, 捩率 (れいりつ)

空間曲線 $\mathbf{p} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3, \mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ を研究する.

速度ベクトル $\dot{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$ が零ベクトルになる点を特異点とよぶ.

以下, 特異点をもたない空間曲線, すなわち正則空間曲線のみを扱う. 正則空間曲線に対して, 弧長 (arc-length)

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2 + \dot{z}(u)^2} du$$

を考えると, $\frac{ds}{dt}(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} > 0$ である. 曲線のパラメータをもとの

t から弧長 s に取り直して, $\mathbf{p} : [0, \ell] \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$ を調べる.

余談. 飛行機やロケットやドローンの飛行の軌跡を調べるために一定速度で進むのである.

$\mathbf{e}_1(s) := \mathbf{p}'(s)$ とおく. $\mathbf{e}_1(s)$ は単位ベクトル (長さが 1) である.

実際, $\mathbf{e}_1(s) = \mathbf{p}'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} \\ \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} \\ \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds} \end{pmatrix}$ のノルムは,

$$\|\mathbf{p}'\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds}\right)^2} = \sqrt{\frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} + \frac{dz^2}{dt}} \frac{dt}{ds} = 1$$

である.

定義. (空間曲線の曲率)

$\kappa(s) := \|\mathbf{e}'_1(s)\| (= \|\mathbf{p}''(s)\|)$ を空間曲線 $\mathbf{p}(s)$ の曲率 (curvature) という. □

注意. $\kappa(s) \geq 0$ である. 空間曲線の場合は, (平面曲線の場合と違い) 曲率は定義により零以上 (つまり非負) である.

単位ベクトル $\mathbf{e}_2(s)$ を

$$\mathbf{e}'_1(s) = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s)$$

となるベクトルとして定める.

注意. $\kappa(s) > 0$ のとき, $\mathbf{e}_2(s)$ は一意的に定まる. もし $\kappa(s) = 0$ となる s がある場合は, $\mathbf{e}_2(s)$ が s について連続的になるように単位ベクトル $\mathbf{e}_2(s)$ を一意的に決めることができる. (恒等的に $\kappa(s) \equiv 0$ のときは $\mathbf{p}(s)$ は直線 (の一部, 線分) を表す.)

以下, $\kappa(s) \neq 0$ つまり $\kappa(s) > 0$ を仮定する.

$\|e_1\| = 1$ だから $e_1 \cdot e_1 = 1$ である.

$e_1 \cdot e_1 = 1$ の両辺を微分して,

$$0 = (e_1 \cdot e_1)' = e_1' \cdot e_1 + e_1 \cdot e_1' = (\kappa e_2) \cdot e_1 + e_1 \cdot (\kappa e_2) = 2\kappa e_1 \cdot e_2 = 2\kappa e_1 \cdot e_2$$

となり, $\kappa > 0$ としているので, $e_1 \cdot e_2 = 0$, つまり, e_1 と e_2 は直交する.

単位ベクトル $e_3(s)$ を

$$e_3(s) := e_1(s) \times e_2(s) \quad (\text{ベクトル積, 外積})$$

で定める. すると, e_1, e_2, e_3 は正規直交基底となり,

$$|e_1 \ e_2 \ e_3| = 1$$

(“右手系”) となる. ただし, 上の式の左辺は行列式である.

定義. e_1, e_2, e_3 を曲線 $p(s)$ のフレネ-セレ枠 (Frenet-Serret frame) をいう.

● フレネ-セレの公式

曲率の定義により,

$$e_1' = \kappa e_2$$

が成り立っている.

さらに, $e_2 \cdot e_2 = 1$ の両辺を微分して,

$$0 = (e_2 \cdot e_2)' = e_2' \cdot e_2 + e_2 \cdot e_2' = 2e_2' \cdot e_2.$$

よって, $e_2' \cdot e_2 = 0$ なので, e_2' は e_2 と直交するので, e_1, e_3 の 1 次結合で表される.

そこで, $e_2' = \mu e_1 + \tau e_3$ と (とりあえず) おく.

$e_2' \cdot e_1 = \mu e_1 \cdot e_1 + \tau e_3 \cdot e_1 = \mu$ であり, $e_2' \cdot e_2 = \mu e_1 \cdot e_2 + \tau e_3 \cdot e_2 = \tau$ である.

一方, $e_1 \cdot e_2 = 0$ の両辺を微分して

$$0 = (e_1 \cdot e_2)' = e_1' \cdot e_2 + e_1 \cdot e_2' = \kappa e_2 \cdot e_2 + e_1 \cdot e_2' = \kappa + e_2' \cdot e_1$$

がわかるので, $\mu = -\kappa$ (曲率のマイナス) であることがわかる. よって,

$$e_2' = -\kappa e_1 + \tau e_3$$

と一意的に表される.

さらに, $e_3 \cdot e_3 = 1, e_3 \cdot e_1 = 0, e_3 \cdot e_2 = 0$ から

$$0 = (e_3 \cdot e_3)' = e_3' \cdot e_3 + e_3 \cdot e_3' = 2e_3' \cdot e_3,$$

$$0 = (e_3 \cdot e_1)' = e_3' \cdot e_1 + e_3 \cdot e_1' = e_3' \cdot e_1 + e_3 \cdot (\kappa e_2) = e_3' \cdot e_1,$$

と計算されるので, e_3' は e_1, e_2 の両方と直交するので, e_3 と平行であり, さらに,

$$0 = (e_3 \cdot e_2)' = e_3' \cdot e_2 + e_3 \cdot e_2' = e_3' \cdot e_2 + e_3(-\kappa e_1 + \tau e_3) = e_3' \cdot e_2 + \tau$$

なので,

$$e_3' = -\tau e_2$$

を得る.

定義. (κ を曲率とよび,) τ を捩率 (れいりつ, ねじれ率, torsion) とよぶ. □

注. 曲率は曲線の “曲がり具合” を表し, 捩率は曲線の “ねじれ具合” を表す. □

上の 3 つの式をまとめて :

定理. (フレネ-セレの公式)

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{e}'_1 & = & \kappa \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 & = & -\kappa \mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 & = & -\tau \mathbf{e}_2 \end{array}$$

が成り立つ. □

上の公式では, 見やすいように, わざとスペースを空けて書いている. この公式は行

列を使って表すと,

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

注. ここで, e_1, e_2, e_3 は列ベクトル (縦ベクトル) で表していることに注意する. ベクトル e_1 等を行ベクトル (横ベクトル) で表している本では, 公式が

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

と表されていることに注意しよう. もちろん, 同じ内容を表している.

● 空間曲線の基本定理

フレネ・セレの公式を微分方程式と見なすと, 曲率 $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ を与えておくと, 1 階連立常微分方程式の一般的な理論から, 初期値 $e_1(0), e_2(0), e_3(0)$ を決めれば, $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$ が一意的存在する.

定理. (空間曲線の基本定理) 正則空間曲線は, その曲率 $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ を与えると, 運動 (平行運動と回転) を除き一意に定まる.

証明. $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ を与え, 始点 $p(0)$ と $s = 0$ での枠 $e_1(0), e_2(0), e_3(0)$ を与えると曲線 $p(s)$ が決まる. 始点と $s = 0$ での枠は運動により移り合う. したがって, 曲線自体もその運動で移り合う. $\square$

$\kappa(s) > 0$ を仮定していることに注意する.

定理. 空間曲線 $p(s)$ の (曲率 $\kappa(s) > 0$ で) 捩率 $\tau(s)$ が恒等的に 0 ならば, $p(s)$ は平面曲線である.

証明. $\tau(s) \equiv 0$ だから, フレネ-セレの公式から, $e_3'(s) \equiv 0$ である. したがって, $e_3 = \mathbf{a}$ は定ベクトルである. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}'(s) = e_3(s) \cdot e_1(s) = 0$ だから,

$$0 = \int_0^s \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}'(s) du = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}(s) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}(0)$$

となり, $\mathbf{p}(s)$ は, 1 次方程式 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}(0) = 0$ で定まる平面に含まれる. □

注. フレネ-セレの公式から,

$$\mathbf{p}'''(s) = \kappa'(s)\mathbf{e}_2(s) - \kappa(s)^2\mathbf{e}_1(s) + \kappa(s)\tau(s)\mathbf{e}_3(s)$$

が成り立つこともわかる. 実際, $\mathbf{p}' = \mathbf{e}_1, \mathbf{p}'' = \mathbf{e}_1' = \kappa\mathbf{e}_2$ であり,

$$\mathbf{p}''' = \kappa'\mathbf{e}_2 + \kappa\mathbf{e}_2' = \kappa'\mathbf{e}_2 + \kappa(-\kappa\mathbf{e}_1 + \tau\mathbf{e}_3) = \kappa'\mathbf{e}_2 - \kappa^2\mathbf{e}_1 + \kappa\tau\mathbf{e}_3$$

となる. □

● 曲率と捩率の公式

定理. 弧長とは限らない任意のパラメータで与えられた空間曲線 $\mathbf{p}(t)$ の曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$ は,

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}\|}{\|\dot{\mathbf{p}}\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{|\dot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}}|}{\|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}\|^2}$$

で与えられる. ここで, $|\dot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}}|$ は行列式である.

(弧長とは限らないパラメータなので, 微分は $\cdot$ (ドット) で表している.)

証明. $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p}' \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_1$, $\ddot{\mathbf{p}} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{e}_1 + \frac{ds}{dt} \dot{\mathbf{e}}_1 = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{e}_1 + \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_1' \frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{e}_1 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \mathbf{e}_2$ である. フレネ-セレの公式を用いると, $\ddot{\mathbf{p}} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \kappa \tau \mathbf{e}_3 + (\mathbf{e}_1 \text{ と } \mathbf{e}_2 \text{ の項})$ の形であることがわかる. したがって,

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{p}}\| &= \frac{ds}{dt}, \quad \dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \kappa \mathbf{e}_3, \quad \|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \kappa \\ |\dot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}}| &= \left| \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_1 \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \mathbf{e}_2 \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \kappa \tau \mathbf{e}_3 \right| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^6 \kappa^2 \tau \end{aligned}$$

を得る. これから定理はすぐに従う. □

演習. $a > 0, b > 0$ とする. 曲線 $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ b t \end{pmatrix}$ は常螺旋 (じょうらせん) と呼ばれる. 常螺旋の曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$ を計算せよ.

解答例. $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ b t \end{pmatrix}$ なので,

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} -a \cos t \\ -a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} a \sin t \\ -a \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

である. したがって, $\|\dot{\mathbf{p}}\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ である.

さらに,

$$\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} ab \sin t \\ -ab \cos t \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad |\dot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}}| = a^2 b$$

もわかる. (ココを演習.)

よって, $\|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}\| = \sqrt{a^2 b^2 \sin^2 t + a^2 b^2 \cos^2 t + a^4} = \sqrt{a^2 b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2}$ である. したがって,

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}\|}{\|\dot{\mathbf{p}}\|^2} = \frac{(a^2 b^2 + a^4)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

であり,

$$\tau(t) = \frac{|\dot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}}|}{\|\dot{\mathbf{p}} \times \ddot{\mathbf{p}}\|^2} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

となる.

□

補足. (時間があれば説明します.)

● 空間曲線のフエンチェルの定理

$p : [0, \ell] \rightarrow \mathbf{R}^3$ を弧長パラメータ表示された正則閉曲線 $p(s)$, すなわち, $p(0) = p(\ell)$ かつ $e_1(0) = e_1(\ell), e_2(0) = e_2(\ell)$ (したがって, $e_3(0) = e_3(\ell)$) をみたす正則曲線とする.

定義. 空間曲線 $p(s)$ の全曲率 (total curvature) を

$$\mu = \int_0^\ell \kappa(s) ds$$

で定まる. ($\kappa(s) > 0$ であったことを思い出そう.)

定理. (空間曲線に対するフエンチェルの定理) 正則閉曲線について, $\mu \geq 2\pi$ が成り立つ. 等号が成立するのは, 平面に含まれる卵形線の場合に限る.

補題. 球面上の曲線 $e_1 : [0, \ell] \rightarrow S^2$ の像 $\gamma = e([0, \ell])$ の長さが 2π 小さいとき, S^2 のある開半球面に含まれる. また, 長さが 2π のときは, γ はある大円と一致する. $\square$

証明. γ の長さを 2 等分する 2 点 p, q で分割し, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ とおく. γ_1 の長さも γ_2 の長さも π より小さいので, p から q への大円弧で長さが π よりも小さいものがある. この大円弧の中点を M とする. γ が点 M を中心とする半球面に含まれることを示す. もし半球面に含まれないとすると, 半球面の境界である大円 c と γ が共有点 r を持つことになる. 一般性を失うことなく, 共有点 r が γ_1 上にあるとしてよい. S^2 の M を通る軸を中心に γ_1 を半回転させ, p を q に, q を p に移した曲線を γ'_1 とし, γ_1 と γ'_1 をつなげて閉曲線は, γ と同じ長さを持つが, 対心点 $\pm r$ が乗っている. すると, この曲線の長さは 2π 以上ということになり, 仮定に反する. したがって, γ は S^2 の開半球面に含まれる.

γ の長さが 2π とし, 2 等分する 2 点 p, q で分割し, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ とおく. γ_1 も γ_2 も長さが π である. p と q を結ぶ大円弧で長さが π 以下のものが存在する. ながさを

比べると, それは長さが π であり, γ_1 または γ_2 と一致するはずである. したがって, p と q を結ぶ別の大円弧も長さ π で, 残りの γ_1 または γ_2 と一致する. したがって, γ はある大円と一致する. $\square$

空間曲線に対するフェンチェルの定理の証明. 仮に, もし $\mu < 2\pi$ とする. すると, 上の補題により $\gamma = e([0, \ell])$ はある開半球面内に含まれる. その中心を $\mathbf{c}$ とする. $[0, \ell]$ 上の関数 $h(s) := \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}(s)$ を考える. このとき, $h(s)$ はある異なるパラメータ s_1 および s_2 で最大値および最小値をもつ. このとき,

$$0 = h'(s_i) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{p}'(s_i) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_1(s_i), \quad i = 1, 2,$$

となる. $\mathbf{e}(s_1), \mathbf{e}(s_2)$ は共に $\mathbf{c}$ と直交するので, $\mathbf{c}$ を中心とする半球面の境界の上にある. これは半球面のとり方に矛盾する. よって, $\mu \geq 2\pi$ が成り立つ.

次に, 等号 $\mu = 2\pi$ が成り立つときを考える. この場合, 上の補題から $e([0, \ell])$ はある大円と一致する. その大円が, 法線ベクトル $\mathbf{c}$ を持つとすると, すべての s について $\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}(s) = 0$ が成り立つ. したがって, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{p}'(s) = 0$ であり, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{p}(s) = d$ (一定) とな

る. よって, 曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ は平面 $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} - d = 0$ 上にある. したがって, 平面曲線に関するフェンチェルの定理により, $\boldsymbol{p}(s)$ は卵形線となる. $\square$