【 幾何学 3： 曲線と曲面の幾何学 】

２０２５年度前期

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

● 授業計画

1．平面曲線　2．平面曲線の性質　3．空間曲線　4．曲面とは何か　5．第一基本形式　6．第二基本形式　7．主方向と漸近方向　8．測地線とガウス・ボンネの定理　9．曲面の位相　10．微分形式　11．ガウス・ボンネの定理（多様体の場合）　12．期末テスト　13．幾何学の世界

● 教科書は使用しない．

参考書

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)」裳華房 (1995).

梅原雅顕，山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」裳華房 (2015).

宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」岩波書店 (2019).

3.　空間曲線

● 空間曲線の曲率，捩率（れいりつ）

空間曲線 $\boldsymbol{p} : [a, b] \to \mathbf{R}^3, \boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ を研究する．

速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$ が零ベクトルになる点を**特異点**とよぶ．

以下，特異点をもたない空間曲線，すなわち**正則空間曲線**のみを扱う．正則空間曲線に対して，**弧長** (arc-length)

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2 + \dot{z}(u)^2} du$$

を考えると，$\frac{ds}{dt}(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} > 0$ である．曲線のパラメータをもとの t から弧長 s に取り直して，$\boldsymbol{p} : [0, \ell] \to \mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{p}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$ を調べる．

余談． 飛行機やロケットやドローンの飛行の軌跡を調べるために一定速度で進むのである．

$\boldsymbol{e}_1(s) := \boldsymbol{p}'(s)$ とおく．$\boldsymbol{e}_1(s)$ は単位ベクトル（長さが 1）である．

実際，$\boldsymbol{e}_1(s) = \boldsymbol{p}'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} \\ \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} \\ \frac{dz}{dt}\frac{dt}{ds} \end{pmatrix}$ のノルムは,

$$\|\boldsymbol{p}'\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\frac{dt}{ds}\right)^2} = \sqrt{\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2 + \frac{dz}{dt}^2}\ \frac{dt}{ds} = 1$$

である．

定義． （空間曲線の曲率）

$\kappa(s) := \|\boldsymbol{e}_1'(s)\| (= \|\boldsymbol{p}''(s)\|)$ を空間曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の**曲率** (curvature) という． □

注意． $\kappa(s) \geqq 0$ である．空間曲線の場合は，（平面曲線の場合と違い）曲率は定義により零以上（つまり非負）である．

単位ベクトル $\boldsymbol{e}_2(s)$ を

$$\boldsymbol{e}_1'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{e}_2(s)$$

となるベクトルとして定める．

注意． $\kappa(s) > 0$ のとき，$\boldsymbol{e}_2(s)$ は一意的に定まる．もし $\kappa(s) = 0$ となる s がある場合は，$\boldsymbol{e}_2(s)$ が s について連続的になるように単位ベクトル $\boldsymbol{e}_2(s)$ を一意的に決めることができる．（恒等的に $\kappa(s) \equiv 0$ のときは $\boldsymbol{p}(s)$ は直線（の一部，線分）を表す．）

以下，$\kappa(s) \neq 0$ つまり $\kappa(s) > 0$ を仮定する．

$\|\boldsymbol{e}_1\| = 1$ だから $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1$ である．
$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1$ の両辺を微分して，

$$0 = (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1)' = \boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1' = (\kappa \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_1 \cdot (\kappa \boldsymbol{e}_2) = 2\kappa \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 2\kappa \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2$$

となり，$\kappa > 0$ としているので，$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$，つまり，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は直交する．

単位ベクトル $\boldsymbol{e}_3(s)$ を

$$\boldsymbol{e}_3(s) := \boldsymbol{e}_1(s) \times \boldsymbol{e}_2(s) \quad \text{（ベクトル積，外積）}$$

で定める．すると，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は正規直交基底となり，

$$|\boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2 \ \boldsymbol{e}_3| = 1$$

（“右手系”）となる．ただし，上の式の左辺は行列式である．

定義． $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の**フレネ-セレ枠** (Frenet-Serret frame) をいう．

● フレネ-セレの公式

曲率の定義により，

$$\boldsymbol{e}_1' = \kappa \boldsymbol{e}_2$$

が成り立っている．

さらに，$\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1$ の両辺を微分して，

$$0 = (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2)' = \boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2' = 2\boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_2.$$

よって，$\boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$ なので，$\boldsymbol{e}_2'$ は $\boldsymbol{e}_2$ と直交するので，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3$ の 1 次結合で表される．
そこで，$\boldsymbol{e}_2' = \mu \boldsymbol{e}_1 + \tau \boldsymbol{e}_3$ と（とりあえず）おく．
$\boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_1 = \mu \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \tau \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \mu$ であり，$\boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_3 = \mu \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 + \tau \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \tau$ である．

一方，$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$ の両辺を微分して

$$0 = (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2)' = \boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2' = \kappa \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2' = \kappa + \boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_1$$

がわかるので，$\mu = -\kappa$（曲率のマイナス）であることがわかる．よって，

$$\boldsymbol{e}_2' = -\kappa \boldsymbol{e}_1 + \tau \boldsymbol{e}_3$$

と一意的に表される．

さらに，$\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1, \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0, \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$ から

$$0 = (\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3)' = \boldsymbol{e}_3' \cdot \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3' = 2\boldsymbol{e}_3' \cdot \boldsymbol{e}_3,$$
$$0 = (\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1)' = \boldsymbol{e}_3' \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_3' \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 \cdot (\kappa \boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_3' \cdot \boldsymbol{e}_1,$$

と計算されるので，$\boldsymbol{e}_3'$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3$ の両方と直交するので，$\boldsymbol{e}_2$ と平行であり，さらに，

$$0 = (\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2)' = \boldsymbol{e}_3' \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_3' \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3(-\kappa \boldsymbol{e}_1 + \tau \boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3' \cdot \boldsymbol{e}_2 + \tau$$

なので，

$$\boldsymbol{e}_3' = -\tau \boldsymbol{e}_2$$

を得る．

定義. （κ を曲率とよび,）τ を捩率 (れいりつ，ねじれ率，torsion) とよぶ. □

注. 曲率は曲線の “曲がり具合” を表し，捩率は曲線の “ねじれ具合” を表す. □

上の 3 つの式をまとめて：

定理. （フレネ-セレの公式）

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{e}_1' & = & \kappa \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2' & = & -\kappa \boldsymbol{e}_1 \qquad\qquad + \tau \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3' & = & -\tau \boldsymbol{e}_2 \end{array}$$

が成り立つ. □

上の公式では，見やすいように，わざとスペースを空けて書いている．この公式は行

列を使って表すと，

$$(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3') = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

注． ここで，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は列ベクトル（縦ベクトル）で表していることに注意する．ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ 等を行ベクトル（横ベクトル）で表している本では，公式が

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1' \\ \boldsymbol{e}_2' \\ \boldsymbol{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}$$

と表されていることに注意しよう．もちろん，同じ内容を表している．

● 空間曲線の基本定理

フレネ・セレの公式を微分方程式と見なすと，曲率 $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ を与えておくと，1 階連立常微分方程式の一般的な理論から，初期値 $\boldsymbol{e}_1(0), \boldsymbol{e}_2(0), \boldsymbol{e}_3(0)$ を決めれば，$\boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{e}_3(s)$ が一意的に存在する．

定理． **（空間曲線の基本定理）** 正則空間曲線は，その曲率 $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ を与えると，運動（平行運動と回転）を除き一意的に定まる．

証明． $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ を与え，始点 $\boldsymbol{p}(0)$ と $s = 0$ での枠 $\boldsymbol{e}_1(0), \boldsymbol{e}_2(0), \boldsymbol{e}_3(0)$ を与えると曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ が決まる．始点と $s = 0$ での枠は運動により移り合う．したがって，曲線自体もその運動で移り合う． $\square$

$\kappa(s) > 0$ を仮定していることに注意する．

定理． 空間曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の（曲率 $\kappa(s) > 0$ で）捩率 $\tau(s)$ が恒等的に 0 ならば，$\boldsymbol{p}(s)$ は平面曲線である．

証明． $\tau(s) \equiv 0$ だから，フレネ-セレの公式から，$\boldsymbol{e}_3'(s) \equiv 0$ である．したがって，$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}$ は定ベクトルである．$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p}'(s) = \boldsymbol{e}_3(s) \cdot \boldsymbol{e}_1(s) = 0$ だから，

$$0 = \int_0^s \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p}'(s) du = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p}(s) - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p}(0)$$

となり，$\boldsymbol{p}(s)$ は，1 次方程式 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p}(0) = 0$ で定まる平面に含まれる． □

注． フレネ-セレの公式から，

$$\boldsymbol{p}'''(s) = \kappa'(s)\boldsymbol{e}_2(s) - \kappa(s)^2\boldsymbol{e}_1(s) + \kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{e}_3(s)$$

が成り立つこともわかる．実際，$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{e}_1' = \kappa e_2$ であり，

$$\boldsymbol{p}''' = \kappa'\boldsymbol{e}_2 + \kappa\boldsymbol{e}_2' = \kappa'\boldsymbol{e}_2 + \kappa(-\kappa\boldsymbol{e}_1 + \tau\boldsymbol{e}_3) = \kappa'\boldsymbol{e}_2 - \kappa^2\boldsymbol{e}_1 + \kappa\tau\boldsymbol{e}_3$$

となる． □

● 曲率と捩率の公式

定理． 弧長とは限らない任意のパラメータで与えられた空間曲線 $\boldsymbol{p}(t)$ の曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$ は，

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\boldsymbol{p}} \times \ddot{\boldsymbol{p}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{p}}\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{|\dot{\boldsymbol{p}}\ \ddot{\boldsymbol{p}}\ \dddot{\boldsymbol{p}}|}{\|\dot{\boldsymbol{p}} \times \ddot{\boldsymbol{p}}\|^2}$$

で与えられる．ここで，$|\dot{\boldsymbol{p}}\ \ddot{\boldsymbol{p}}\ \dddot{\boldsymbol{p}}|$ は行列式である．
（弧長とは限らないパラメータなので，微分は $\dot{}$（ドット）で表している．）

証明． $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}'\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{e}_1$, $\ddot{\boldsymbol{p}} = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{ds}{dt}\dot{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{ds}{dt}\boldsymbol{e}_1'\frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\kappa\boldsymbol{e}_2$ である．フレネ-セレの公式を用いると，$\dddot{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\kappa\tau\boldsymbol{e}_3 + (\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の項) の形であることがわかる．したがって，

$$\|\dot{\boldsymbol{p}}\| = \frac{ds}{dt}, \quad \dot{\boldsymbol{p}} \times \ddot{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\kappa\boldsymbol{e}_3, \quad \|\dot{\boldsymbol{p}} \times \ddot{\boldsymbol{p}}\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\kappa$$

$$|\dot{\boldsymbol{p}}\ \ddot{\boldsymbol{p}}\ \dddot{\boldsymbol{p}}| = \left|\frac{ds}{dt}\boldsymbol{e}_1 \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\kappa\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\kappa\tau\boldsymbol{e}_3\right| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^6\kappa^2\tau$$

を得る．これから定理はすぐに従う． □

演習． $a > 0, b > 0$ とする．曲線 $\boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ b\,t \end{pmatrix}$ は**常螺旋** (じょうらせん) と呼ばれる．常螺旋の曲率 $\kappa(t)$ と振率 $\tau(t)$ を計算せよ．

解答例． $\boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ b\,t \end{pmatrix}$ なので，

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{pmatrix}, \quad \ddot{\boldsymbol{p}}(t) = \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -a\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dddot{\boldsymbol{p}}(t) = \begin{pmatrix} a\sin t \\ -a\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．したがって，$\|\dot{\boldsymbol{p}}\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$ である．

さらに，

$$\dot{\boldsymbol{p}} \times \ddot{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} ab\sin t \\ -ab\cos t \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad |\dot{\boldsymbol{p}}\ \ddot{\boldsymbol{p}}\ \dddot{\boldsymbol{p}}| = a^2 b$$

もわかる．（ココを演習.）

よって，$\|\dot{\boldsymbol{p}} \times \ddot{\boldsymbol{p}}\| = \sqrt{a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t + a^4} = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2+b^2}$ である．したがって，

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\boldsymbol{p}} \times \ddot{\boldsymbol{p}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{p}}\|^2} = \frac{(a^2b^2+a^4)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

であり，

$$\tau(t) = \frac{|\dot{\boldsymbol{p}}\ \ddot{\boldsymbol{p}}\ \dddot{\boldsymbol{p}}|}{\|\dot{\boldsymbol{p}} \times \ddot{\boldsymbol{p}}\|^2} = \frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

となる． □

補足. （時間があれば説明します.）

● 空間曲線のフェンチェルの定理

$\boldsymbol{p} : [0, \ell] \to \mathbf{R}^3$ を弧長パラメータ表示された正則閉曲線 $\boldsymbol{p}(s)$，すなわち，$\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}(\ell)$ かつ $\boldsymbol{e}_1(0) = \boldsymbol{e}_1(\ell), \boldsymbol{e}_2(0) = \boldsymbol{e}_2(\ell)$（したがって，$\boldsymbol{e}_3(0) = \boldsymbol{e}_3(\ell)$）をみたす正則曲線とする.

定義. 空間曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ の全曲率 (total curvature) を

$$\mu = \int_0^\ell \kappa(s) ds$$

で定まる.（$\kappa(s) > 0$ であったことを思い出そう.）

定理. （空間曲線に対するフェンチェルの定理） 正則閉曲線について，$\mu \geqq 2\pi$ が成り立つ. 等号が成立するのは，平面に含まれる卵形線の場合に限る.

補題． 球面上の曲線 $\boldsymbol{e}_1 : [0, \ell] \to S^2$ の像 $\gamma = \boldsymbol{e}([0, \ell])$ の長さが 2π 小さいとき，S^2 のある開半球面に含まれる．また，長さが 2π のときは，γ はある大円と一致する． □

証明． γ の長さを 2 等分する 2 点 p, q で分割し，$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ とおく．γ_1 の長さも γ_2 の長さも π より小さいので，p から q への大円弧で長さが π よりも小さいものがある．この大円弧の中点を M とする．γ が点 M を中心とする半球面に含まれることを示す．もし半球面に含まれないとすると，半球面の境界である大円 c と γ が共有点 r を持つことになる．一般性を失うことなく，共有点 r が γ_1 上にあるとしてよい．S^2 の M を通る軸を中心に γ_1 を半回転させ，p を q に，q を p に移した曲線を γ_1' とし，γ_1 と γ_1' をつなげて閉曲線は，γ と同じ長さを持つが，対心点 $\pm r$ が乗っている．すると，この曲線の長さは 2π 以上ということになり，仮定に反する．したがって，γ は S^2 の開半球面に含まれる．

γ の長さが 2π とし，2 等分する 2 点 p, q で分割し，$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ とおく．γ_1 も γ_2 も長さが π である．p と q を結ぶ大円弧で長さが π 以下のものが存在する．ながさを

比べると，それは長さが π であり，γ_1 または γ_2 と一致するはずである．したがって，p と q を結ぶ別の大円弧も長さ π で，残りの γ_1 または γ_2 と一致する．したがって，γ はある大円と一致する． □

空間曲線に対するフェンチェルの定理の証明． 仮に，もし $\mu < 2\pi$ とする．すると，上の補題により $\gamma = \boldsymbol{e}([0,\ell])$ はある開半球面内に含まれる．その中心を $\boldsymbol{c}$ とする．$[0,\ell]$ 上の関数 $h(s) := \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{p}(s)$ を考える．このとき，$h(s)$ はある異なるパラメータ s_1 および s_2 で最大値および最小値をもつ．このとき，

$$0 = h'(s_i) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{p}'(s_i) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{e}_1(s_i),\ i = 1, 2,$$

となる．$\boldsymbol{e}(s_1), \boldsymbol{e}(s_2)$ は共に $\boldsymbol{c}$ と直交するので，$\boldsymbol{c}$ を中心とする半球面の境界の上にある．これは半球面のとり方に矛盾する．よって，$\mu \geqq 2\pi$ が成り立つ．

次に，等号 $\mu = 2\pi$ が成り立つときを考える．この場合，上の補題から $\boldsymbol{e}([0,\ell])$ はある大円と一致する．その大円が，法線ベクトル $\boldsymbol{c}$ を持つとすると，すべての s について $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{e}(s) = 0$ が成り立つ．したがって，$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{p}'(s) = 0$ であり，$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{p}(s) = d$ （一定）とな

る．よって，曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ は平面 $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} - d = 0$ 上にある．したがって，平面曲線に関するフェンチェルの定理により，$\boldsymbol{p}(s)$ は卵形線となる． $\square$