

【幾何学3. 演習プリント 兼 出席調査】

2025年度1学期 木曜日3コマ目 206教室 担当 石川 剛郎

学生番号

氏名

解答例

第6回の演習問題.

(1) ワインガルテン行列 $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ について

$$\det(A) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad \frac{1}{2}\text{tr}(A) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \text{ となることを確かめよ.}$$

(2) 半径 a の球面 $p = \begin{pmatrix} a \cos u \cos v \\ a \cos u \sin v \\ a \sin u \end{pmatrix}$ の第一基本量は $E = a^2$, $F = 0$, $G = a^2 \cos^2 u$,
第二基本量は $L = a$, $M = 0$, $N = a \cos^2 u$ となることを用いて, ガウス曲率 $K = \det(A)$,
平均曲率 $H = \frac{1}{2}\text{tr}(A)$ を求めよ.

その他, 講義内容についての質問やコメント等があれば, 自由に, ただし簡潔に記してください.
(質問・コメントは成績評価とは無関係.)

演習問題の解答 と, もしあれば質問・コメント. (スペースが足りなくなったときは, 表面にその旨を明示して裏面を使ってもよいです.)

$$(1) A = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$\frac{1}{2}\text{tr}(A) = \frac{1}{2} \frac{1}{EG - F^2} (GL - FM - FM + EN) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

$$(2) K = \frac{a \cdot a \cos^2 u}{a^2 \cdot a^2 \cos^2 u} = \frac{1}{a^2}$$

$$(1) H = \frac{a^2 \cdot a \cos^2 u + (a^2 \cos^2 u) a}{2a^2 \cdot a^2 \cos^2 u} = \frac{1}{a}$$

(2) の別解

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \cos^2 u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \cos^2 u \end{pmatrix} = \frac{1}{a^4 \cos^2 u} \begin{pmatrix} a^2 \cos^2 u & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \cos^2 u \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^4 \cos^2 u} \begin{pmatrix} a^3 \cos^2 u & 0 \\ 0 & a^3 \cos^2 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ (Aを直接計算)}$$

$$\text{よって } K = \det(A) = \frac{1}{a^2}, \quad H = \frac{1}{2}\text{tr}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{a} = \frac{1}{a}$$