【 幾何学３．演習プリント 兼 出席調査 】

２０２５年度１学期　木曜日３コマ目　206教室　担当 石川 剛郎

学生番号 ______________　氏名 ______ 解答例

第１０回の演習問題.
平面から原点を除いた $S = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の微分形式について，次の問いに答えよ．
(1) 関数 $f(u,v) = \dfrac{1}{2}\log(u^2+v^2)$ について，df を求めよ．
(2) 微分 1-形式 $\varphi = \dfrac{u}{u^2+v^2}du + \dfrac{v}{u^2+v^2}dv$, $\psi = \dfrac{-v}{u^2+v^2}du + \dfrac{u}{u^2+v^2}dv$ に対して，外微分 $d\varphi, d\psi$ を求めよ．
(3) 微分 1-形式 $\psi = \dfrac{-v}{u^2+v^2}du + \dfrac{u}{u^2+v^2}dv$ と閉曲線 $c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ について，線積分 $\displaystyle\int_c \psi$ を求めよ．

その他，講義内容についての質問やコメント等があれば，自由に，ただし簡潔に記してください．（質問・コメントは成績評価とは無関係．）

演習問題の解答 と，もしあれば質問・コメント．（スペースが足りなくなったときは，表面にその旨を明示して裏面を使ってもよいです．）

解答例 (1) $f_u = \dfrac{1}{2}\dfrac{2u}{u^2+v^2} = \dfrac{u}{u^2+v^2}$, $f_v = \dfrac{1}{2}\dfrac{2v}{u^2+v^2} = \dfrac{v}{u^2+v^2}$

よって $df = f_u du + f_v dv = \dfrac{u}{u^2+v^2}du + \dfrac{v}{u^2+v^2}dv$

(2)
$$d\varphi = \left\{\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)_u du + \left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)_v dv\right\}\wedge du + \left\{\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)_u du + \left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)_v dv\right\}\wedge dv$$
$$= -\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)_v du\wedge dv + \left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)_u du\wedge dv$$
$$= \left\{\frac{u\cdot 2v}{(u^2+v^2)^2} - \frac{v\cdot 2u}{(u^2+v^2)^2}\right\} du\wedge dv = 0$$

$$d\psi = \left\{\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)_u du + \left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)_v dv\right\}\wedge du + \left\{\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)_u du + \left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)_v dv\right\}\wedge dv$$
$$= \left\{\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)_v + \left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)_u\right\} du\wedge dv$$
$$= \left\{\frac{1\cdot(u^2+v^2) - v\cdot 2v}{(u^2+v^2)^2} + \frac{1\cdot(u^2+v^2) - u\cdot 2u}{(u^2+v^2)^2}\right\} du\wedge dv$$
$$= \frac{u^2 - v^2 + v^2 - u^2}{(u^2+v^2)^2} du\wedge dv = 0$$

(3) 曲線 c 上で $u^2+v^2=1$ だから
$$\int_c \psi = \int_0^{2\pi}\{(-\sin t)(-\sin t)dt + (\cos t)(\cos t)dt = \int_0^{2\pi} dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$
//