

【 幾何学 3 : 曲線と曲面の幾何学 】

2025年度前期

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

● 授業計画

1. 平面曲線
2. 平面曲線の性質
3. 空間曲線
4. 曲面とは何か
5. 第一基本形式
6. 第二基本形式
7. 主方向と漸近方向
8. 測地線とガウス・ボンネの定理
9. 曲面の位相
10. 微分形式
11. ガウス・ボンネの定理 (多様体の場合)
12. 期末テスト
13. 幾何学の世界

● 教科書は使用しない.

参考書

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)」裳華房 (1995).

梅原雅顕, 山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」裳華房 (2015).

宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」岩波書店 (2019).

2. 平面曲線の性質

● 曲率円

曲線上の点において、その曲線をもっともよく近似する直線は接線である。では、もっともよく近似する円は何か？

曲線上 $\mathbf{p}(s)$ の点 $\mathbf{p}(s_0)$ での曲線の曲率 $\kappa(s_0)$ が零ではないとする。

定義. 中心の位置ベクトルが $\mathbf{p}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{n}(s_0)$ で半径が $\frac{1}{|\kappa(s_0)|}$ の円を、曲線の点 $\mathbf{p}(s_0)$ における曲率円あるいは接触円 (osculating circle) という。

定理. 曲線 $\mathbf{p}(s)$ 上の点 $\mathbf{p}(s_0)$ における曲率円は、点 $\mathbf{p}(s_0)$ において、その曲線に 2 次の接触をする。逆に、点 $\mathbf{p}(s_0)$ で曲線に “2 次” の接触をする円は曲率円に限る。

証明は省略する。

● 正則平面曲線のガウス写像

$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を正則平面曲線とし, $\mathbf{e}, \mathbf{n}$ をフレネ-セレ枠とする.

定義. 正則平面曲線 $\mathbf{p} : [0, \ell] \rightarrow \mathbf{R}^2$ について, 各 $s \in [0, \ell]$ に対し, (原点を始点とする) 単位法ベクトル $\mathbf{n}(s)$ (の終点) を対応させる写像 $g : [0, \ell] \rightarrow S^1$ (単位円) をガウス写像 (Gauss mapping) とよぶ.

補題. x -軸とベクトル $\mathbf{e}(s)$ のなす角度を $\varphi(s)$ とする. このとき次が成り立つ :

$$\mathbf{e}(s) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) \\ \sin \varphi(s) \end{pmatrix}, \quad g(s) = \mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(s) \\ \cos \varphi(s) \end{pmatrix}.$$

□

さて, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) \\ \sin \varphi(s) \end{pmatrix}$ であるから, $\mathbf{e}'(s) = \varphi'(s) \begin{pmatrix} -\sin \varphi(s) \\ \cos \varphi(s) \end{pmatrix}$ となり,
 $\mathbf{e}'(s) = \varphi'(s)\mathbf{n}(s)$ が成り立つ. フレネ-セレの公式の $\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ と比べて,
 $\varphi'(s) = \kappa(s)$ を得る:

補題. (曲率の意味) x -軸と $\mathbf{e}(s)$ (単位接ベクトル) のなす角度を $\varphi(s)$ とするとき,
 $\kappa(s) = \varphi'(s)$ が成り立つ.

● 閉曲線の回転数

定義. 平面曲線の始点と終点が一致し, そこでの接ベクトル, 法ベクトルも一致するとき, 閉曲線とよぶ. さらに自己交差がないとき, 単純閉曲線とよぶ. 単純閉曲線が囲む閉領域が凸 (とつ) であるとき, 卵形線 (らんけいせん, oval) とよぶ. ただし, 領域が凸とは, 領域内の 2 点を結ぶ線分が領域内にとどまるときにいう.

定義. (正則平面閉曲線の回転数) 弧長パラメータ s で表された閉曲線 $\mathbf{p} : [0, \ell] \rightarrow \mathbf{R}^2$ の回転数 (rotation number) を

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^\ell \kappa(s) ds$$

で定める. ここで $\kappa(s)$ は曲率である. □

注意.

$$\int_0^\ell \kappa(s) ds = \int_0^\ell \varphi'(s) ds = \varphi(\ell) - \varphi(0)$$

となる. ここで, ベクトル $\mathbf{e}(s)$ は原点のまわりを回り, それにしたがって, 角度 φ は連続的に変化するが, 閉曲線なので, $\varphi(\ell) - \varphi(0)$ は 2π の整数倍である. したがって, R は整数値をとる.

正則閉曲線を正則閉曲線のまま微小変形すると, 回転数は少ししか変わらない. しかし回転数は整数値を取るなので微小変形に関して回転数の値は不変である. したがっ

て，正則閉曲線を正則閉曲線のまま大きく変形しても回転数は変わらないことがわかる．
(回転数は“正則ホモトピー”の不変量) □

● 4 頂点の定理

定義. 平面曲線 $p(s)$ の変曲点とは $\kappa(s)$ (曲率) が零になる点のことである．すなわち，変曲点とは，曲率関数 $\kappa(s)$ の零点 (zero point) のことである．

平面曲線 $p(s)$ の頂点とは $\kappa'(s)$ (曲率の s -微分) が零になる点のことである．すなわち，頂点とは，曲率関数の臨界点 (critical point) のことである．

定理. (4 頂点定理) 単純閉曲線上には，少なくとも 4 つの頂点が存在する．

注. 円の場合は，その曲率 κ は定数であり，すべての点が頂点となる．

4 頂点定理の証明の概略. $\kappa(s)$ が定数であるような区間があれば頂点は無限個ある． κ

が定数になる区間がない場合は, $\kappa(s)$ が最大になる点 p と $\kappa(s)$ が最小になる点 q があって p と q は異なる. p と q では κ' が消えるので, p と q は頂点である. それ以外に頂点がないとする. 1つの弧の上では $\kappa' < 0$ すなわち κ が減少し, もう一つの弧の上では $\kappa' > 0$ すなわち κ が増加する. 必要があれば平面を回転させて直線 pq を x -軸とし, 上半平面 $y > 0$ 上で $\kappa' < 0$, 下半平面 $y < 0$ 上では $\kappa' > 0$ とする. x -軸とベクトル $e(s)$ のなす角度を $\varphi(s)$ とし, $e(s) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) \\ \sin \varphi(s) \end{pmatrix}$ とおくと, $\kappa(s) = \varphi'(s)$ である. 点 p, q 以外では, $\kappa'(s)y(s) < 0$ だから,

$$\begin{aligned} 0 &> \int_0^\ell \kappa'(s)y(s)ds = [\kappa(s)y(s)]_0^\ell - \int_0^\ell \kappa(s)y'(s)ds \\ &= - \int_0^\ell \varphi'(s)(\sin \varphi(s))ds = [\cos \varphi(s)]_0^\ell = 0 \end{aligned}$$

となり矛盾を得る. よって, もう1つの点 r で $\kappa' = 0$ (頂点) となる. p, q, r 以外には頂点がないとする. p, q, r がこの順序で並んでいる場合, κ が p で最大値をとるから, p から q では $\kappa' < 0$ で, r から p では $\kappa' > 0$ となるはずであり, κ が q で最小値を

とるから, q から r では $\kappa' > 0$ となるはずである. すると, q から p では $\kappa' \geq 0$ で, r 以外では $\kappa' > 0$ となる. よって, この場合も上の評価が成立して矛盾を得る. p, r, q の順に並んでいるとしても同様に矛盾を得る. したがって, 頂点がさらに 1 点あることになり, 4 点以上の頂点の存在が示される. $\square$

例. 楕円 $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$, ただし $a > b > 0$) を考える.

楕円は正則曲線である.

楕円のフレネ-セレ枠 $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s)\}$ と曲率 $\kappa(s)$ を, 弧長 s ではないが, 元のパラメータ t を使って表して, それを用いて, 楕円には頂点 ($\kappa'(s) = 0$ となる点) が 4 つあることを確認してみよう.

まず, $\dot{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$ だから, 弧長 s は (点 $(a, 0)$ から測るとす

ると),

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2} du = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} du$$

であり, $\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$ である. このとき, $\frac{dt}{ds}$ は (t の式として) 逆数

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$$

で与えられる. したがって, $\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{p}}{ds}$ は

$$\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

により (t の式として) 表される. また, $\mathbf{n}$ は ($\frac{\pi}{2}$ 回転させて,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} -b \cos t \\ -a \sin t \end{pmatrix}$$

となる. フレネ・セレ枠が t の式として表された.

次に, κ の定義により, e の s -微分 e' に関して,

$$e' = \kappa n$$

なので, n との内積をとって,

$$e' \cdot n = \kappa n \cdot n = \kappa$$

となる.

$$e' = \frac{de}{ds} = \frac{de}{dt} \frac{dt}{ds} = \dot{e} \frac{dt}{ds}$$

であるから,

$$\kappa = e' \cdot n = \dot{e} \frac{dt}{ds} \cdot n = \frac{dt}{ds} \dot{e} \cdot n$$

なので, $\frac{dt}{ds}$ と $\dot{e} \cdot n$ を計算する. 簡単に, $h := a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$ とおいておくと,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} = h^{-\frac{1}{2}}$$

であり,

$$\mathbf{e} = h^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = h^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -b \cos t \\ -a \sin t \end{pmatrix}$$

なので,

$$\dot{\mathbf{e}} = (\dot{h}^{-\frac{1}{2}}) \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} + h^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -a \cos t \\ -b \sin t \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{n} &= (\dot{h}^{-\frac{1}{2}}) \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} \cdot h^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -b \cos t \\ -a \sin t \end{pmatrix} + h^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -a \cos t \\ -b \sin t \end{pmatrix} \cdot h^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -b \cos t \\ -a \sin t \end{pmatrix} \\ &= h^{-1} \begin{pmatrix} -a \cos t \\ -b \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \cos t \\ -a \sin t \end{pmatrix} \\ &= h^{-1} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) \\ &= h^{-1} ab \end{aligned}$$

となり, したがって,

$$\kappa = h^{-\frac{1}{2}} h^{-1} ab = abh^{-\frac{3}{2}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

と計算される.

最後に頂点を調べる．頂点は s -微分 $\kappa' = 0$ となる点であり，

$$\kappa' = \frac{d\kappa}{ds} = \frac{d\kappa}{dt} \frac{dt}{ds} = \dot{\kappa} h^{-1}$$

であるが， $h > 0$ だから， $\dot{\kappa} = 0$ となる点が頂点である． $\kappa = abh^{-\frac{3}{2}}$ であるから，

$$\dot{\kappa} = ab \left(h^{-\frac{3}{2}} \right)^\cdot = -\frac{3}{2} ab h^{-\frac{5}{2}} \dot{h}$$

なので， $\dot{\kappa} = 0$ となるのは， $\dot{h} = 0$ のときである． $h = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$ だったから， $\dot{h} = 0$ となるのは，確かに $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ときの 4 点である． $\square$

注意. 4 頂点定理に関する詳しいことは，参考書：宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」あるいは 梅原雅顕，山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」を参照せよ．

付録 (時間があれば，授業中に触れます.)

● 全曲率とフェンチェルの定理

定義. 正則平面曲線 $p : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ に対して, 全曲率 (total curvature) を

$$\mu := \int_a^b |\kappa(s)| ds$$

で定義する.

定理. 正則平面閉曲線の全曲率は $\mu \geq 2\pi$ をみたす. 等号は卵形線のときに限る.

証明の概略. $p : [0, \ell] \rightarrow \mathbf{R}^2$ を正則平面閉曲線とする.

$g(s) = \mathbf{e}_2(s) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(s) \\ \cos \varphi(s) \end{pmatrix}$ であるから, $g'(s) = \varphi'(s) \begin{pmatrix} -\cos \varphi(s) \\ -\sin \varphi(s) \end{pmatrix}$ なので,
 $\|g'(s)\| = |\varphi'(s)| = |\kappa(s)|$ となる. したがって,

$$\int_0^\ell \|g'(s)\| ds = \int_0^\ell |\kappa(s)| ds = \mu$$

を得る. つまり, μ はガウス写像 $g(s)$ が単位円を行きつ戻りつして始点に戻るまでの「道のり」を表している.

さて, ガウス写像の像が半円に含まれないことを示す. 仮に, ガウス写像の像が半円に含まれているとして矛盾を導く. 円を適宜回転させて, ガウス写像の像が, 右半円に留まる, つまり, $\cos \varphi(s) \geq 0$ としてよい. すると, $\mathbf{e}_1(s)$ の x -成分 $\cos \varphi(s) = x'(s)$ について, $\int_0^\ell x'(s)ds \geq 0$ が成り立つはずである. しかし, $\int_0^\ell x'(s)ds = x(\ell) - x(0) = 0$ である. したがって, $x'(s)$ は恒等的に 0 に等しいはずである. つまり, $x(s)$ は一定となり, $\mathbf{p}(s)$ は一直線上にあり, 閉曲線になるためには, 特異点をもたなければならない. 正則性に矛盾する. したがって, ガウス写像の像は半円に含まれない.

よって, $g(s_1) = -g(s_2)$ となる $s_1, s_2 \in [0, \ell]$ 上にあることがわかる. 始点を取り直して, $s_1 = 0$ としてよい. 0 から s_1 までのみちのりは π 以上である. さらに, s_1 から ℓ までの道のりも π 以上である. よって, $\mu \geq 2\pi$ を得る.

次に等号が成り立つ場合を考察する.

その場合には, まず, $\mathbf{p}$ には自己交差は生じないことが示される. 実際, 自己交差点

があるとする、2つの閉曲線ができて、それぞれの部分に上の議論を適用して、それぞれの全曲率が π より大きくなり、もとの閉曲線の全曲率は 2π より大きくなる。

したがって、等号 $\mu = 2\pi$ が成り立つのは、 $\mathbf{p}$ は単純閉曲線の場合に限る。さらにその時、 $g'(s)$ が消えることはなく、 $g(s)$ は S^1 上を単調に一周することになる。もし、 $\mathbf{p}$ が卵形線でないとする、異なる2点で曲線に接する直線で、曲線が片側にあるようなものがとれる。これは $g(s)$ の単調性に矛盾する。したがって $\mathbf{p}$ は卵形線である。 $\square$