【 幾何学 3： 曲線と曲面の幾何学 】

２０２５年度前期

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

● 授業計画

1．平面曲線　2．平面曲線の性質　3．空間曲線　4．曲面とは何か　5．第一基本形式　6．第二基本形式　7．主方向と漸近方向　8．測地線とガウス・ボンネの定理　9．曲面の位相　10．微分形式　11．ガウス・ボンネの定理（多様体の場合）　12．期末テスト　13．幾何学の世界

● 教科書は使用しない．

参考書

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)」裳華房 (1995).

梅原雅顕，山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」裳華房 (2015).

宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」岩波書店 (2019).

11．ガウス・ボンネの定理（多様体の場合）

第 8 回の講義で紹介したガウス・ボンネの定理は空間曲面（$\mathbf{R}^3$ 内の曲面）に関するものだった．実はガウス・ボンネの定理は，空間曲面に限らず，より抽象的な 2 次元リーマン多様体について成り立つ定理である．それに関することがらを紹介する．

● 2 次元リーマン多様体

曲面 S の開被覆 $\{U_\lambda\}$ と各チャート（局所座標近傍）$\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda (\subset \mathbf{R}^2)$ について，V_λ 上の第一基本形式 $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ が与えられ，貼り合わせの写像（座標変換）$\varphi_{\lambda'} \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_{\lambda'}) \to \varphi_{\lambda'}(U_\lambda \cap U_{\lambda'}$ で第一基本形式が保たれるとき，そのような曲面 S の全体での “計量” が与えられているとき，S を **2 次元リーマン多様体**とよぶ．S 全体の計量を ds^2 あるいは，g などで表す．

注． 記号 ds^2 は曲面論を踏襲した記号である．一般次元を扱うような場合は，リーマン計量を，接ベクトルの組に対して，それらの一般的な “内積” を与える構造として，簡単に記号で g などと表し，(S, g) などと空間と計量の組として書くことも多い．

● 接続形式

さて，2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) の局所座標近傍に関して，uv-平面の開集合 U 上の計量（第一基本形式）$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をとり，その双対基底の場 $\{\omega_1, \omega_2\}$ とする．

たとえば,

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u} - \sqrt{E}\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

とすれば,

$$\omega_1 = \sqrt{E}\left(du + \frac{F}{E}dv\right), \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{EG - F^2}{E}}dv$$

と表される．

実際，$ds^2(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}) = E,\ ds^2(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}) = F,\ ds^2(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}) = G$ の時，

$$ds^2(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1,\ ds^2(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 0,\ ds^2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 1$$

となる．

また，$\langle \omega_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 1, \langle \omega_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle = 0, \langle \omega_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 0, \langle \omega_2, \boldsymbol{e}_2 \rangle = 0$ が成り立つ．

リーマン計量（第一基本形式）は，

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$$

と表され，面積要素は

$$d\widehat{A} = \omega_1 \wedge \omega_2$$

と表される．

実際,

$$\begin{aligned}\omega_1^2+\omega_2^2 &= \left\{\sqrt{E}\left(du+\tfrac{F}{E}dv\right)\right\}^2+\left\{\sqrt{\tfrac{EG-F^2}{E}}dv\right\}^2\\ &= E\left(du^2+2\tfrac{F}{E}dudv+\tfrac{F^2}{E^2}dv^2\right)+\tfrac{EG-F^2}{E}dv^2\\ &= Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=ds^2\end{aligned}$$

であり,

$$\omega_1\wedge\omega_2=\sqrt{E}\left(du+\frac{F}{E}dv\right)\wedge\sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}dv=\sqrt{EG-F^2}du\wedge dv=d\widehat{A}$$

という具合に確かめられる.

定義． 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) に対して，$dA := \sqrt{EG-F^2}dudv$ とおき，**向きによらない面積要素**とよぶ.

S 上の関数 f が与えられたとき，$\displaystyle\int_S f dA = \int_S f\sqrt{EG-F^2}dudv$ （重積分）である.

$\displaystyle\int_S dA$ は S の面積である.

ω_1, ω_2 の外微分 $d\omega_1, d\omega_2$ はそれぞれ微分 2-形式なので，ある関数 p, q が一意的に存在して

$$d\omega_1 = p(\omega_1 \wedge \omega_2), \quad d\omega_2 = q(\omega_1 \wedge \omega_2)$$

と表される．

$$\mu := -p\omega_1 - q\omega_2$$

とおく．

定義． 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) の座標近傍 U 上の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に対して，上の微分 1-形式 μ を**接続形式** (connection form) とよぶ．

演習． 半径 a の球面 $S, \boldsymbol{p}(u,v) = \begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ a\cos u\sin v \\ a\sin u \end{pmatrix}, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, 0 \leqq v \leqq 2\pi$ に対して，$E = a^2, F = 0, G = a^2\cos^2 u$ であった．$\omega_1 = \sqrt{E}du + \frac{F}{\sqrt{E}}dv$，$\omega_2 = \sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}dv$

とおく．半径 a の球面 S について，次の問いに答えよ．

(1) ω_1, ω_2 および面積要素 $d\widehat{A} = \omega_1 \wedge \omega_2$ を求めよ．

(2) $d\omega_1 = p\omega_1 \wedge \omega_2, d\omega_2 = q\omega_1 \wedge \omega_2$ を満たす関数 p, q, および接続形式 $\mu = -p\omega_1 - q\omega_2$ を求めよ．

(3) (2) で求めた接続形式 μ に対し，$d\mu = K\omega_1 \wedge \omega_2$ となる K を求めよ．

(4) 球面 S の面積 $\displaystyle\int_S dA$ と積分 $\displaystyle\int_S K dA$ を求めよ．ただし，dA は $d\widehat{A}$ に対応する向きによらない面積要素である．

● 共変微分（線形接続）とガウス曲率

正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 関する接続形式 μ と，U 上の接ベクトル場 X に対して，

$$\nabla_X \boldsymbol{e}_1 := -\mu(X)\boldsymbol{e}_2, \quad \nabla_X \boldsymbol{e}_2 := -\mu(X)\boldsymbol{e}_1$$

とおく．さらに，U 上の任意の接ベクトル場 $Y = \eta_1 \boldsymbol{e}_1 + \eta_2 \boldsymbol{e}_2$ に対し，

$$\nabla_X Y := \eta_1 \nabla_X \boldsymbol{e}_1 + X(\eta_1)\boldsymbol{e}_1 + \eta_2 \nabla_X \boldsymbol{e}_2 + X(\eta_2)\boldsymbol{e}_2$$

と定める．ここで，$X(\eta_1), X(\eta_2)$ はそれぞれ η_1, η_2 の X-方向微分である．

定義． $\nabla_X Y$ を Y の X 方向の**レビ・チビタ** (Levi-Covita) **共変微分**とよぶ．

共変微分は正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ のとり方によらず定まり，S 上のベクトル場 X と Y に対して，S 上のベクトル場 $\nabla_X Y$ が定まる．

接続形式 μ の外微分を使って，

$$d\mu = K\omega_1 \wedge \omega_2$$

により，関数 K を定める．（K は一意的に定まる．）

定義． 関数 K を 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) の**ガウス曲率**とよぶ．

注. 空間曲面 $\boldsymbol{p} : U \to \mathbf{R}^3$ の場合のガウス曲率（第 6 回の授業で紹介）は，U 上に $\mathbf{R}^3$ から誘導されたリーマン計量に関して，今回紹介したガウス曲率に一致する.

● 測地線と測地的曲率

2 次元リーマン多様体 S の上の曲線 $\gamma(t), \gamma : [a, b] \to S$ に対して，速度ベクトル（接ベクトル） $\dot{\gamma}(t)$ が定まる．しかし，一般の S に対して，加速度ベクトルを S の接ベクトルとして単純に定めることはできない.

注. 空間曲面の場合，2 階微分 $\ddot{\gamma}(t)$ は曲面に接するとは限らず，その接方向の部分 $[\ddot{\gamma}(t)]^T$ を取り出して考察した（第 8 回の授業）.

一般の 2 次元リーマン多様体 S の場合，$\dot{\gamma}$ による $\dot{\gamma}$ のレビ・チビタ共変微分 $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ を「加速度ベクトル」として捉える.

注． 正確に言うと，曲線に沿ったベクトル場 $\dot{\gamma}$ を S 上のベクトル場 X に拡張して，$\nabla_X X$ を考えて，それを曲線上に制限して考える．

$\dot{\gamma} = \xi_1 \boldsymbol{e}_1 + \xi_2 \boldsymbol{e}_2$ と正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を用いて表したとき，$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ は

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} &= \dot{\xi}_1 \boldsymbol{e}_1 + \xi_1 \nabla_{\dot{\gamma}} \boldsymbol{e}_1 + \dot{\xi}_2 \boldsymbol{e}_2 + \xi_2 \nabla_{\dot{\gamma}} \boldsymbol{e}_2 \\ &= \{\dot{\xi}_1 + \mu(\dot{\gamma})\xi_2\}\boldsymbol{e}_1 + \{\dot{\xi}_2 - \mu(\dot{\gamma})\xi_1\}\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

と表される．

定義． 2 次元リーマン多様体 S に対して，$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ となる S 上の曲線 $\gamma(t)$ を**測地線** (geodesic) という．

γ が測地線になる条件は，

$$\dot{\xi}_1 + \mu(\dot{\gamma})\xi_2 = 0, \quad \dot{\xi}_2 - \mu(\dot{\gamma})\xi_1 = 0,$$

である．

空間曲面上の測地線と同様に次が成り立つ（第 8 回の授業参照）：

補題． 測地線の速度ベクトル $\dot{\gamma}$ の長さ（大きさ，ノルム）$\|\dot{\gamma}\|$ は一定である．

証明． 曲線 γ に対して，

$$\begin{array}{rcl} \|\dot{\gamma}\|^2 & = & \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \\ & = & \langle \xi_1 \boldsymbol{e}_1 + \xi_2 \boldsymbol{e}_2, \xi_1 \boldsymbol{e}_1 + \xi_2 \boldsymbol{e}_2 \rangle \\ & = & \xi_1^2 \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle + 2\xi_1\xi_2 \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle + \xi_2^2 \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \rangle \\ & = & \xi_1^2 + \xi_2^2 \end{array}$$

が成り立つ．また，測地線 γ に対しては，

$$\dot{\xi}_1\xi_1 + \dot{\xi}_2\xi_2 = -(\mu(\dot{\gamma})\xi_2\xi_1 + (\mu(\dot{\gamma})\xi_1\xi_2 = 0$$

である．したがって，

$$\frac{d}{dt}\left(\|\dot{\gamma}\|^2\right) = \frac{d}{dt}(\xi_1^2 + \xi_2^2) = 2(\dot{\xi}_1\xi_1 + \dot{\xi}_2\xi_2) = 0.$$

となり，$\|\dot{\gamma}\|^2$，したがって測地線のノルム $\|\dot{\gamma}\|$ が一定であることがわかる． □

空間曲面上の曲線に対して「測地的曲率」を定義した（第 7 回，第 8 回の授業）．一般に 2 次元リーマン多様体 S の上の曲線 γ に対して測地的曲率が定義できる．

S の上の弧長パラメータを持つ（測地線とは限らない）曲線 $\gamma(s)$ を考える．速度ベクトル $\gamma'(s)$ のノルムは 1 である．

定義． $\boldsymbol{\kappa}_g(s) := (\nabla_{\gamma'}\gamma')(s)$ を $\gamma(s)$ の**測地的曲率ベクトル**とよぶ.

注． 曲線を弧長パラメータで表してから定義されることを強調しておく．

$\gamma(s)$ に沿った正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s)\}$ を使って，速度ベクトル $\gamma'(s)$ を

$$\gamma'(s) = \xi_1(s)\boldsymbol{e}_1(s) + \xi_2(s)\boldsymbol{e}_2(s)$$

と 1 次結合で表すとき，

$$\boldsymbol{\kappa}_g(s) = (\nabla_{\gamma'}\gamma')(s) = \{\xi_1'(s) + \mu(\gamma'(s))\xi_2(s)\}\boldsymbol{e}_1(s) + \{\xi_2'(s) - \mu(\gamma'(s))\xi_1(s)\}\boldsymbol{e}_2(s)$$

である．したがって，$\boldsymbol{\kappa}_g(s)$ と $\gamma'(s)$ の内積は

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\kappa}_g(s), \gamma'(s) \rangle &= \{\xi_1'(s) + \mu(\gamma'(s))\xi_2(s)\}\xi_1(s) + \{\xi_2'(s) - \mu(\gamma'(s))\xi_1(s)\}\xi_2(s) \\
&= \xi_1'(s)\xi_1(s) + \xi_2'(s)\xi_2(s) \\
&= \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{ds}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \\
&= \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{ds}\|\gamma'(s)\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

なので，$\boldsymbol{\kappa}_g(s)$ と $\gamma'(s)$ は直交する．

曲面に向きが与えられている場合，$\gamma'(s)$ を正の向きに $90°$ だけ回転した方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}_g(s)$ とすると，$\boldsymbol{\kappa}_g(s)$ と $\boldsymbol{n}_g(s)$ が平行なので，

$$\boldsymbol{\kappa}_g(s) = \kappa_g(s)\boldsymbol{n}_g(s)$$

と表される．

定義． $\kappa_g(s)$ を測地的曲率とよぶ．

$\langle \nabla_{\gamma'}\gamma', \boldsymbol{n}_g \rangle = \langle \kappa_g \boldsymbol{n}_g, \boldsymbol{n}_g \rangle = \kappa_g$ が成り立つ．

$\gamma(s)$ が測地線であるための条件は κ_g が恒等的に零となることである．

弧長パラメータとは限らないパラメータ t で表された曲線 $\gamma(t)$ の測地的曲率は，それを弧長パラメータ表示したものに対する測地的曲率 $\kappa_g(s)$ を元のパラメータ t で表したものと定義される．このとき，

$$\kappa_g(t) = \frac{\langle \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \boldsymbol{n}_g \rangle}{\langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle}$$

が成り立つ．

● リーマン曲面上の三角形に関するガウス-ボンネの定理

命題. （三角形に関するガウス-ボンネの定理） 向きづけられたリーマン曲面 (S, ds^2) の上の 3 つの曲線 $\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)$ によって囲まれた単連結な三角形領域 D の内角を $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{31}$ とするとき，

$$\int_{\partial D} \kappa_g(s) ds + \int_D K dA = \varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{31} - \pi$$

が成り立つ．ただし，s は弧長パラメータで，左辺の第 1 項は ∂D 上を正の向き（内部の領域を右に見る向き）に積分するものとする．また，K はガウス曲率で dA は (S, ds^2) から定まる面積要素である．

● 大域的ガウス-ボンネの定理

定理. 向きづけられたリーマン曲面 (S, ds^2) 上の領域 D，ただし，境界 ∂D は空集合か，領域 D を左手に見るいくつかの単純閉曲線で囲まれているとする．このとき，

$$\int_{\partial D} \kappa_g(s) ds + \int_D K dA = 2\pi\chi(D)$$

が成り立つ．とくに，S がコンパクトで境界のない場合は，

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ．

証明の概略. D をなめらかな辺を持ついくつかの三角形に，たとえば m 個の三角形に分割し，それらの三角形の頂点が ∂D 上に n_1 個，D の内部に n_2 個，辺が ∂D 上に ℓ_1 個，D の内部に ℓ_2 個あるとする．

それぞれの三角形に上に述べた「三角形に関するガウス-ボンネの定理」をあてはめて，それぞれの辺の総和を考える．κ_g の積分については，隣り合う三角形で共有する辺

の向きが反対になるので打ち消し合うので境界上のものだけが残る．また，∂D 上の頂点に集まる三角形の内角の和は π で，D の内部の頂点に集まる内角の和は 2π なので，

$$\int_{\partial D} \kappa_g(s)ds + \int_D K dA = n_1\pi + n_2(2\pi) - m\pi$$

を得る．1 つの三角形は 3 つの辺を持ち，D の内部の辺は 2 つの三角形に共有されるので，

$$3m = \ell_1 + 2\ell_2$$

が成り立つ．また，境界の各単純閉曲線上の頂点の個数と辺の個数は一致するから，

$$n_1 = \ell_1$$

となる．$2\pi\chi(D) = 2\pi\{n_1 + n_2 - (\ell_1 + \ell_2) + m\}$ なので，

$$\begin{aligned}
&\{n_1\pi + n_2(2\pi) - m\pi\} - 2\pi\chi(D) \\
&\qquad = n_1\pi + n_2(2\pi) - m\pi - 2\pi\{n_1 + n_2 - (\ell_1 + \ell_2) + m\} \\
&\qquad = -n_1\pi + 2\ell_1\pi + 2\ell_2\pi - 3m\pi \\
&\qquad = (\ell_1 - n_1)\pi + (\ell + 2\ell_2 - 3m)\pi = 0
\end{aligned}$$

よって，$n_1\pi + n_2(2\pi) - m\pi = 2\pi\chi(D)$ と書き換えられる．したがって，

$$\int_{\partial D} \kappa_g(s)ds + \int_D K dA = 2\pi\chi(D)$$

が成り立つ． □

例． $\mathbf{R}^3$ の中の半径 a の球面 $\boldsymbol{p}(u,v) = \begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ a\cos u\sin v \\ a\sin u \end{pmatrix}, -\pi < u < \pi, 0 \leqq v \leqq 2\pi,$ として定まる 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) について，ガウス曲率は $K = \frac{1}{a^2}$，向きのついた面積要素は $dA = a^2(\cos u)dudv$ なので，ガウス-ボンネの定理の左辺は

$$\int_S K dA = \iint_{[-\pi,\pi]\times[0,2\pi]} (\cos u)dudv = 4\pi$$

であり，右辺は，球面のオイラー標数は 2 なので，

$$2\pi\chi(S) = 4\pi$$

となり，確かに等式が成り立つ． □