

【 幾何学 3 : 曲線と曲面の幾何学 】

2025年度前期

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

● 授業計画

1. 平面曲線
2. 平面曲線の性質
3. 空間曲線
4. 曲面とは何か
5. 第一基本形式
6. 第二基本形式
7. 主方向と漸近方向
8. 測地線とガウス・ボンネの定理
9. 曲面の位相
10. 微分形式
11. ガウス・ボンネの定理 (多様体の場合)
12. 期末テスト
13. 幾何学の世界

● 教科書は使用しない.

参考書

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)」裳華房 (1995).

梅原雅顕, 山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」裳華房 (2015).

宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」岩波書店 (2019).

10. 微分形式

● 外微分形式

uv -平面の領域 D 上の C^∞ 微分形式を導入する. 各点 (u, v) に対して, 基本単位ベクトル $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\frac{\partial}{\partial u}$ で表し, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\frac{\partial}{\partial v}$ で表す. $\frac{\partial}{\partial u}$ も $\frac{\partial}{\partial v}$ も, いわゆるベクトル場 (べくとるば, vector field) と呼ばれるものである. 各点にベクトルが与えられていると捉える. 一般には, ベクトル場は (u, v) の関数 $a(u, v), b(u, v)$ を使って

$$\xi(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \eta(u, v) \frac{\partial}{\partial v} = \begin{pmatrix} \xi(u, v) \\ \eta(u, v) \end{pmatrix}$$

の形で表される.

注意. ベクトル場を偏微分の記号を使って表しているのには理由がある. 各点 (u, v)

でベクトル場 $\frac{\partial}{\partial u}$ は点の動き (流れ) $(u, v) \mapsto (u + t, v)$ を表していると考えられる. (t はたとえば「時間」と思ってよい.) u, v の関数 $f(u, v)$ に対して, その動きに沿って, 関数 f がどのように変化するかは, 偏微分 $\frac{\partial f}{\partial u} = f_u$ で与えられる. この偏微分は f に「偏微分作用素」(partial differential operator) $\frac{\partial}{\partial u}$ が f に「作用」して得られる, つまり, $\frac{\partial}{\partial u} f = \frac{\partial f}{\partial u}$ と見るわけである. 同様に一般のベクトル場 $\xi(u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \eta(u, v)\frac{\partial}{\partial v}$ は, 偏微分作用素

$$\left\{ \xi(u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \eta(u, v)\frac{\partial}{\partial v} \right\} f := \xi(u, v)\frac{\partial f}{\partial u} + \eta(u, v)\frac{\partial f}{\partial v}$$

と見なすのである. さて, $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ は $\mathbf{R}^2$ の各点での接平面 (これも $\mathbf{R}^2$ と同一視される) の基底となる. その双対基底を du, dv と書く.

$$du \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = 1, \quad du \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = 0, \quad dv \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = 0, \quad dv \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = 1$$

である. $du \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$ 等は, $\langle du, \frac{\partial}{\partial u} \rangle$ 等と書いた方が適切な場合も多い. 一般に, ベクトル場 $X = \xi(u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \eta(u, v)\frac{\partial}{\partial v}$ については

$$\langle du, X \rangle = \xi(u, v), \quad \langle dv, X \rangle = \eta(u, v)$$

である.

定義. (0 形式) $(0)_{\text{local}}$ uv -平面の領域 D 上の C^∞ 関数 $f(u, v)$ を D 上の 0 次微分形式または 0 形式とよぶ.

$(0)_{\text{global}}$ 曲面 S 上の関数 $f : S \rightarrow \mathbf{R}$ であって, 各局所座標系 (u, v) に関して $f(u, v)$ が C^∞ 関数となるものを S 上の C^∞ 関数とよび, それを S 上の 0 次外微分形式 (differential form of order 0, differential 0-form) または 0 次微分形式または 0 形式とよぶ. □

定義. (1 形式) $(1)_{\text{local}}$ D 上の C^∞ 関数 $f(u, v), g(u, v)$ に対して,

$$f(u, v)du + g(u, v)dv$$

を D 上の 1 次外微分形式 (exterior differential form of order 1, exterior differential 1-form) または 1 次微分形式または 1 形式とよぶ.

$(1)_{\text{global}}$ 曲面 S の各局所座標系 $(D; u, v)$ に対して 1 次外微分形式 $f(u, v)du +$

$g(u, v)dv$ が与えられていて、任意の別の座標系 $(E; s, t)$ に対して与えられた 1 次外微分形式 $h(s, t)ds + k(s, t)dt$ に対して、 $D \cap E$ 上で貼り合わせの条件

$$h(s, t)ds + k(s, t)dt = f(u, v)du + g(u, v)dv$$

が成り立つとき、 S 上に 1 次外微分形式または 1 次微分形式または 1 形式が与えられたという。

ひとつの 1 次外微分形式をまとめて、たとえば記号 φ で書いた場合、各局所座標系 $(D; u, v)$ に関して

$$\varphi = f(u, v)du + g(u, v)dv$$

という書き方をする。

□

ここで、貼り合わせの条件

$$h(s, t)ds + k(s, t)dt = f(u, v)du + g(u, v)dv$$

の意味は、 $D \cap E$ 上の関数 $s = s(u, v), t = t(u, v)$ について、

$$ds = s_u du + s_v dv, dt = t_u du + t_v dv$$

なので,

$$\begin{aligned} h(s, t)ds + k(s, t)dt &= h(s, t)(s_u du + s_v dv) + k(s, t)(t_u du + t_v dv) \\ &= \{h(s, t)s_u + k(s, t)t_u\}du + \{h(s, t)s_v + k(s, t)t_v\}dv \end{aligned}$$

だから, (u, v) の関数として, 等式

$$hs_u + kt_u = f, \quad hs_v + kt_v = g$$

が成り立つことを意味する.

定義. (2 形式) $(2)_{\text{local}}$ $a(u, v)$ を D 上の C^∞ 関数とすると,

$$a(u, v)du \wedge dv$$

を D 上の 2 次外微分形式 (exterior differential form of order 2, exterior differential 2-form) または 2 次微分形式または 2 形式とよぶ.

$(2)_{\text{global}}$ 曲面 S の各局所座標系 $(D; u, v)$ に対して 2 次外微分形式 $a(u, v)du \wedge dv$ が与えられていて, 任意の $a(u, v)du \wedge dv$ と, 任意の別の座標系 $(E; s, t)$ に対して与えら

れた 2 次外微分形式 $b(s, t)ds \wedge dt$ に対して, $D \cap E$ 上で貼り合わせの条件

$$b(s, t)ds \wedge dt = a(u, v)du \wedge dv$$

が成り立つとき, S 上に 2 次外微分形式または 2 次微分形式または 2 形式が与えられたという.

ひとつの 2 次外微分形式をまとめて, たとえば記号 ω で書いた場合, 各局所座標系 $(D; u, v)$ に関して

$$\omega = a(u, v)du \wedge dv$$

という書き方をする. □

ここで, ω はウェッジ積 (wedge product) あるいは外積 (exterior product) とよばれる積で, 2 つのベクトル X, Y に対して,

$$(du \wedge dv)(X, Y) := \begin{vmatrix} du(X) & du(Y) \\ dv(X) & dv(Y) \end{vmatrix}$$

により定まる．この積は交代的 (alternative) あるいは歪対称的 (skew-symmetric) である：

$$du \wedge du = 0, \quad dv \wedge dv = 0, \quad du \wedge dv = -dv \wedge du$$

が成り立つ．

貼り合わせの条件

$$b(s, t)ds \wedge dt = a(u, v)du \wedge dv$$

の意味は， $D \cap E$ 上の関数 $s = s(u, v), t = t(u, v)$ について，

$$ds = s_u du + s_v dv, \quad dt = t_u du + t_v dv$$

なので，

$$\begin{aligned} ds \wedge dt &= (s_u du + s_v dv, dt) \wedge (t_u du + t_v dv) \\ &= s_u t_u du \wedge du + s_u t_v du \wedge dv + s_v t_u dv \wedge du + s_v t_v dv \wedge dv \\ &= (s_u t_v - s_v t_u) du \wedge dv = \begin{vmatrix} s_u & s_v \\ t_u & t_v \end{vmatrix} du \wedge dv \end{aligned}$$

となるから, (u, v) の関数として等式

$$b(s, t) = a(u, v) \begin{vmatrix} s_u & s_v \\ t_u & t_v \end{vmatrix}$$

が成り立っていることを意味する.

● 1 次微分形式の外積

上で既に登場しているが, 曲面 S 上の 1-形式 φ と ψ のウェッジ積 (交代積, 外積) を各局所座標系 (u, v) について,

$$\varphi = f(u, v)du + g(u, v)dv, \quad \psi = h(u, v)du + k(u, v)dv$$

と表したとき, その局所座標系 (u, v) について,

$$\begin{aligned}
 \varphi \wedge \psi &= \{f(u, v)du + g(u, v)dv\} \wedge \{h(u, v)du + k(u, v)dv\} \\
 &= f(u, v)h(u, v)du \wedge du + f(u, v)k(u, v)du \wedge dv \\
 &\quad + g(u, v)h(u, v)dv \wedge du + g(u, v)k(u, v)dv \wedge dv \\
 &= \{f(u, v)k(u, v) - g(u, v)h(u, v)\}du \wedge dv \left(= \begin{vmatrix} f & g \\ h & k \end{vmatrix} du \wedge dv \right)
 \end{aligned}$$

で定める. この定め方は局所座標系に依存せず定まる. (別の座標系を使った計算と両立する.)

注. 第一基本形式や第二基本形式では, $du^2, dudv, dv^2$ などが登場したが, これらは対称積 (symmetric product) とよばれるものであり, ウェッジ積とは違って, $dudv = dvdu$ が成り立つ. ウェッジ積 $du \wedge dv$ については, $du \wedge dv = -dv \wedge du$ である.

● 微分形式の外微分

関数 (0 形式) $f(u, v)$ に対しては, その外微分 df は 1 次微分形式

$$df := f_u du + f_v dv$$

として定める. これは局所座標系 (u, v) のとり方に依らず定まる. 実際, 別の座標系 (s, t) に対して, (2 つの座標近傍の共通部分の上で)

$$\begin{aligned} f_s ds + f_t dt &= f_s(s_u du + s_v dv) + f_t(t_u du + t_v dv) \\ &= (f_s s_u + f_t t_u) du + (f_s s_v + f_t t_v) dv \\ &= f_u du + f_v dv \end{aligned}$$

が成り立つ.

演習. 平面から原点を除いた $S = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の関数 $f(u, v) = \frac{1}{2} \log(u^2 + v^2)$ について, df を求めよ.

1-形式 $\varphi = f(u, v)du + g(u, v)dv$ に対しては, 外微分 $d\alpha$ を

$$\begin{aligned} d\varphi &:= df \wedge du + dg \wedge dv \\ &= (f_u du + f_v dv) \wedge du + (g_u du + g_v dv) \wedge dv \\ &= f_v dv \wedge du + g_u du \wedge dv \\ &= (g_u - f_v) du \wedge dv \end{aligned}$$

(の最後の式) により定義する. この定義は座標系 (u, v) のとり方に依存しない.

実際, 別の座標系 (s, t) について, $\alpha = hds + kdt$ であるとき,

$$dh \wedge ds + dk \wedge dt = (k_s - h_t) ds \wedge dt$$

であるが, 座標系 (u, v) で計算すると,

$$\begin{aligned} dh \wedge ds + dk \wedge dt &= (h_u du + h_v dv) \wedge (s_u du + s_v dv) \\ &\quad + (k_u du + k_v dv) \wedge (t_u du + t_v dv) \\ &= \{h_u s_v - h_v s_u + k_u t_v - k_v t_u\} du \wedge dv \end{aligned}$$

となるが, $f = h s_u - k t_u, g = h s_v + k t_v$ に注意して計算すると,

$$\begin{aligned} g_u - f_v &= (h s_v + k t_v)_u - (h s_u - k t_u)_v \\ &= h_u s_v + h s_{uv} + k_u t_v + k t_{uv} - h_v s_u - h s_{uv} - k_v t_u - k t_{uv} \\ &= h_u s_v - h_v s_u + k_u t_v - k_v t_u \end{aligned}$$

となるので, 結局,

$$dh \wedge ds + dk \wedge dt = (g_u - f_v) du \wedge dv$$

である. したがって, 外微分の定義が座標系 (u, v) のとり方に依存しないことがわかる.

演習. $S = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の微分 1-形式

$$\varphi = \frac{u}{u^2 + v^2} du + \frac{v}{u^2 + v^2} dv, \quad \psi = \frac{-v}{u^2 + v^2} du + \frac{u}{u^2 + v^2} dv$$

に対して, $d\varphi, d\psi$ を求めよ.

2-形式 $\psi = a(u, v) du \wedge dv$ に対しては, $d\psi = 0$ と定める. これも局所座標系のとり方に依存しない.

さて, 微分形式の外微分に関して次が成り立つ:

補題. 任意の微分形式 θ に対して $d(d\theta) = 0$ となる.

証明. 関数 f については,

$$d(df) = d(f_u du + f_v dv) = (f_{vu} - f_{uv}) du \wedge dv = 0$$

である. 1 次, 2 次微分形式は外微分を 2 回行くと 3 次以上の微分形式だから 0 となる.

□

注. 上の補題は, 曲面 (2 次元) の場合に限らず, 一般次元の多様体上でも正しい.

また, 一般に, θ を i 形式, φ を j 形式とすると, ウェッジ積 $\theta \wedge \varphi$ の外微分について次が成り立つ:

$$d(\theta \wedge \varphi) = d\theta \wedge \varphi + (-1)^i \theta \wedge d\varphi.$$

特に, 2 つの 1 次微分形式のウェッジ積の場合,

$$d(\theta \wedge \varphi) = d\theta \wedge \varphi - \theta \wedge d\varphi$$

となる.

定義.

- (1) 微分形式 β は $d\varphi = 0$ となるとき閉形式 (closed form) であるという.
- (2) 微分形式 ψ は, ある微分形式 φ について $\psi = d\varphi$ となるとき, 完全形式 (exact form) であるという.

系. 完全形式は閉形式である.

証明. ψ が完全形式なら, ある微分形式 φ について $\psi = d\varphi$ となる. このとき, $d\psi = d(d\varphi) = 0$ であるから, ψ は閉形式である. $\square$

● 微分形式の積分

平面領域 D 上の微分 1-形式 $\varphi = f(u, v)du + g(u, v)dv$ の曲線 $c : [a, b] \rightarrow D, c(t) =$

$(u(t), v(t)), a \leq t \leq b$ に沿う積分を

$$\int_c \varphi := \int_a^b \left(f \frac{du}{dt} + g \frac{dv}{dt} \right) dt \quad (\text{右辺は重積分})$$

で定める. また, D 上の微分 2-形式 $\psi = h(u, v)du \wedge dv$ の有界閉領域 A 上での積分を

$$\int_A \psi := \iint_A h(u, v)dudv \quad (\text{右辺は重積分})$$

で定める. その際, 領域の「向き付け」を配慮して, $\varphi = k(u, v)dv \wedge du$ に対しては, $\varphi = -k(u, v)du \wedge dv$ と直してから,

$$\int_A \varphi := - \iint_A k(u, v)dudv \quad (\text{右辺は重積分})$$

と定められる.

演習. $S = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の微分 1-形式 $\psi = \frac{-v}{u^2 + v^2}du + \frac{u}{u^2 + v^2}dv$ と閉曲線

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ について, 線積分 } \int_c \psi \text{ を求めよ.}$$

(もし ψ が完全形式で $\psi = df$, ただし f は S 上の関数, と表されたとしたら,
$$\int_c \psi = \int_c df = \int_0^{2\pi} \left(f_u \frac{du}{dt} + f_v \frac{dv}{dt} \right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{df(u(t), v(t))}{dt} dt = [f(u(t), v(t))]_0^{2\pi}$$
$$= f(c(2\pi)) - f(c(0)) = 0 \text{ となるはずである.})$$

● ストークスの定理

長方形領域 $R = [a, b] \times [c, d] = \{(u, v) \mid a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$ の上で, 微分形式

$\varphi = fdu + gdv$ の外微分 $d\varphi = (g_u - f_v)du \wedge dv$ を積分すると,

$$\begin{aligned}
 \int_R d\varphi &= \int_R (g_u - f_v)du \wedge dv \\
 &:= \iint_R (g_u - f_v)dudv \\
 &= \int_c^d \left(\int_a^b g_u du \right) dv - \int_a^b \left(\int_c^d f_v dv \right) du \\
 &= \int_c^d \{g(b, v) - g(a, v)\} dv - \int_a^b \{f(u, d) - f(u, c)\} du \\
 &= \int_c^d g(b, v)dv + \int_b^a f(u, d)du + \int_d^c g(a, v) + \int_a^b f(u, c)du \\
 &= \int_{\partial R} \varphi
 \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, ∂R は領域 R の境界のことであり, 最後の積分積分変換を用いれば一般に次がわかる:

定理 (ストークス (Stokes) の定理) 境界 ∂R をもつ平面領域 D 上の微分 1-形式 φ に対して,

$$\int_D d\varphi = \int_{\partial D} \varphi$$

が成り立つ.

● ポアンカレの補題

単連結領域とは, その中の閉曲線が連続的に 1 点につぶせるような領域である. “穴の開いていない” 領域である. 単連結領域では, 始点と終点を共有する 2 つの曲線は始点と終点を固定したまま連続的に移り合う.

補題. (ポアンカレ (Poincaré) の補題)

平面の単連結領域 D 上の 1 次閉形式は完全形式である.

証明の概略. まず, 長方形領域 $R = [a, b] \times [c, d]$ の場合に示す.

$\varphi = f(u, v)du + g(u, v)dv$ を閉形式とする. $d\varphi = (g_u - f_v)du \wedge dv$ だから, $g_u = f_v$ である.

このとき, 関数 $h(u, v)$ で $h_u = f, h_v = g$ となるものを見つければ, $dh = h_u du + h_v dv = f du + g dv = \varphi$ となり, φ が完全形式であることがわかる.

上のような h は (あるとすれば)

$$h(u, v) = \int_{(a, v)}^{(u, v)} f(u, v) du + k(v)$$

という形をしているはずである. h を v で微分すると,

$$\begin{aligned} g(u, v) = h_v(u, v) &= \int_{(a, v)}^{(u, v)} f_v(u, v) du + \frac{dk}{dv}(v) \\ &= \int_{(a, v)}^{(u, v)} g_u(u, v) du + \frac{dk}{dv}(v) \\ &= g(u, v) - g(a, v) + \frac{dk}{dv}(v) \end{aligned}$$

となるので, $k(v)$ を

$$k(v) := \int_{(a,b)}^{(a,v)} g(a, v) dv$$

と定め,

$$h(u, v) := \int_{(a,v)}^{(u,v)} f(u, v) du + \int_{(a,b)}^{(a,v)} g(a, v) dv$$

とおく. そうすると, h は条件 $h_u = f, h_v = g$ を満たす.

一般の場合は, (各連結成分において) 領域 D の 1 点 (a, b) を決め, D 内の任意の点 (u, v) と曲線 $c: [0, 1] \rightarrow D$, ただし $c(0) = (a, b), c(1) = (u, v)$ となるように結び,

$$h(u, v) := \int_c \varphi = \int_c f(u, v) du + g(u, v) dv$$

(線積分) により関数 h を定める. h の定め方が曲線 c のとり方によらないことがわかり, 条件 $h_u = f, h_v = g$, したがって $dh = \varphi$ を満たすこともわかり, φ が完全形式であることが示される. □

例. $\mathbf{R}^2$ 上の微分 1-形式 $\varphi = u dv + v du$ は閉形式である. 実際, $d\varphi = du \wedge dv + dv \wedge du = 0$ となる. $\mathbf{R}^2$ は単連結なので, φ は完全形式である. 実際, $\varphi = df$ となる関数 $f = f(u, v)$ があるかどうか調べると, 条件は $f_u = v, f_v = u$ であり, $f_u = v$ から $f = uv + a(v)$ の形をしているはずで, $f_v = u + a'(v)$ $a'(v) = 0$ から, $a(v)$ は定数となる. 実際, $f = uv + C$ (C は定数) について, $\varphi = df$ となる. $\square$