

【 幾何学 3 : 曲線と曲面の幾何学 】

2025年度前期

担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

● 授業計画

1. 平面曲線
2. 平面曲線の性質
3. 空間曲線
4. 曲面とは何か
5. 第一基本形式
6. 第二基本形式
7. 主方向と漸近方向
8. 測地線とガウス・ボンネの定理
9. 曲面の位相
10. 微分形式
11. ガウス・ボンネの定理 (多様体の場合)
12. 期末テスト
13. 幾何学の世界

● 教科書は使用しない.

参考書

小林昭七 著「曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)」裳華房 (1995).

梅原雅顕, 山田光太郎 著「曲線と曲面 (改訂版)」裳華房 (2015).

宮岡礼子 著「曲線と曲面の現代幾何学」岩波書店 (2019).

1. 平面曲線

● 平面曲線

閉区間 $[a, b]$ で定義された xy -平面上の曲線 $\boldsymbol{p} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ は, 写像, つまりパラメータ t で動く $\mathbf{R}^2$ の点

$$\boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

のことである. $\boldsymbol{p}$ としては, 以下, 簡単のため, 何度でも微分できる, つまり C^∞ 級と仮定する. もっと弱い C^2 級 (2 階連続微分可能) という仮定で十分なことが多い.

定義. t -微分 $\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ を速度ベクトル, あるいは曲線 $\mathbf{p}$ の接ベクトルとよぶ.

$\dot{\mathbf{p}}(t)$ が零ベクトルにならないとき, つまり $\dot{\mathbf{p}}(t) \neq \mathbf{0}$ のとき t (あるいは $\mathbf{p}(t)$) を曲線 $\mathbf{p}$ の正則点とよび, $\dot{\mathbf{p}}(t)$ が零ベクトルになってしまうとき, つまり $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0}$ のとき t (あるいは $\mathbf{p}(t)$) を $\mathbf{p}$ の特異点とよぶ.

t の増加する方向を曲線の向きという.

注意. ここでは, ユークリッド平面 (2次元ユークリッド空間) を $\mathbf{R}^2$ で表しているが, (Euclid の頭文字をとって) E^2 と表す場合もある. □

余談. ユークリッド平面は, 集合としては直積集合 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ であり, その要素 (“点” とよぶ) は $P(a_1, a_2)$ あるいは単に (a_1, a_2) という具合に, 成分あるいは “座標” を横に並べてを書くのが通常である. 原点 (基準点) を $O(0, 0)$ にとり, ベクトル空間と

しての $\mathbf{R}^2$ の基底 $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を決めれば, $\mathbf{R}^2$ の任意のベクトル $\mathbf{v}$ は

$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と一意的に表される. したがって, 点 $P(a_1, a_2)$

は位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ に対応する列ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ で表されることになる. 上の定義

では, a_1 を x , a_2 を y で表している. a_1 を x_1 , a_2 を x_2 と表す場合もある.

なお, $\mathbf{R}^2$ の双対ベクトル空間 $(\mathbf{R}^2)^* = \{f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \text{ 線形写像} \}$ の双対基底 $\mathbf{f}_1 = (1, 0), \mathbf{f}_2 = (0, 1)$ を考えると, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は標準内積に関する正規直交基底なので, $(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_1 = a_1 = (a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2)(\mathbf{e}_1)$, $(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 = a_2 = (a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2)(\mathbf{e}_2)$ となり, 列ベクトル $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ は行ベクトル $a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 = (a_1, a_2)$ に対応し, $\mathbf{f}_1 = (1, 0), \mathbf{f}_2 = (0, 1)$ と表される. ($\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ を用いてベクトル $\mathbf{e}_1$ を“観察”して得られるデータが $(1, 0)$, $\mathbf{e}_1$ を“観察”して得られるデータが $(0, 1)$ となる, というようなイメージを持つことも可能である.) □

例. $a > 0$ を定数とする. $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ に対し, $\dot{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix}$ である. $\mathbf{p}(t)$ は正則点だけからなる. $\square$

例. $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, $t \in (-\infty, \infty)$, について, $\dot{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ である. $t \neq 0$ のときは $\mathbf{p}$ の正則点であり, $t = 0$ は曲線 $\mathbf{p}$ の特異点である. $\square$

曲線 $\mathbf{p}(t)$ の速度ベクトル $\dot{\mathbf{p}}(t)$ の長さ (ノルム) は, $\|\dot{\mathbf{p}}(t)\| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$ である. $\|\dot{\mathbf{p}}(t)\| = 0$ となるのは, t が特異点, つまり, $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0}$ のとき, そのときに限る.

以下, 特に断らない限り, 特異点を持たないような曲線だけを扱う.

定義. 曲線 $p(t)$ の長さ (length) を

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

で定める. さらに, 区間 $[a, t]$ 上での長さ

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2} du$$

を弧長, あるいは弧長パラメータとよぶ.

注意. 積分区間の終点 t を区別するためだけに, 積分する変数の方を t ではなく別の文字で u としたが, 記号の選び方は本質的なことではない.

特異点がない状況で, $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} > 0$ なので, t が増加するとき, s も増加する. (狭義単調増加). このとき, t は s の (やはり C^2 級の) 関数と考えられ, $\frac{dt}{ds} > 0$ となる. したがって, 曲線の向きを変えずに, 弧長 s を曲線のパラメータにとり直すこ

とができる.

余談. “時間” t をパラメータとする代わりに, 出発点からの“走行距離, 道のり” s をパラメータに取るのである. すぐにわかるように, そうすると, 曲線上を進む速度が一定となる. 道の形状, 曲がり具合を知るために, 一定速度で走ってみるのである.

以下, 弧長に関する微分を $\cdot$ (ドット) と区別して, $'$ (プライム, ダッシュ) で表すことにする.

弧長パラメータで表された曲線 $\mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ に対し, s -微分 $\mathbf{p}'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \end{pmatrix}$ を考えると,

$$\|\mathbf{p}'(s)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dt}{ds} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{ds} = 1,$$

(速度 1) となる.

例. $a > 0$ を定数とする. $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}$ については, $s = at$ となる. 実際,

$\dot{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix}$ なので, $\|\dot{\mathbf{p}}(t)\| = a$ であるから, $s(t) = \int_0^t a du = at$ である.

よって, $\mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} a \cos \frac{s}{a} \\ a \sin \frac{s}{a} \end{pmatrix}$ と表される.

● 平面曲線のフレネ-セレ枠と曲率

$\mathbf{e}(s) := \mathbf{p}'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ とおくと, $\mathbf{e}(s)$ は単位ベクトル (長さが 1) となる.

$\mathbf{e}(s)$ を (反時計回りに) $\frac{\pi}{2}$ (90°) だけ回転して得られるベクトル $\mathbf{n}(s) := \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix}$

(法ベクトル) も考える.

定義. $e(s), n(s)$ を平面曲線のフレネー・セレ枠 (Frenet-Serret frame) とよぶ.

e, n は正規直交基底 (正規直交系, 正規直交枠 (フレーム)) となる. つまり, 内積について

$$e \cdot n = 1, \quad n \cdot n = 1, \quad e \cdot n = 0,$$

が成り立つ. したがって, $(e \cdot e)' = 0$ である. 一方,

$$(e \cdot e)' = (x'(s)^2 + y'(s)^2)' = 2x'(s)x''(s) + 2y'(s)y''(s) = 2e \cdot e'$$

なので, $e \cdot e' = 0$ となる (直交している).

注意. 一般に, 内積に関してもライプニッツ則 $(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'$ が成り立つ. $\square$

したがって, $\mathbf{e}'$ は $\mathbf{n}$ と平行なベクトルになるので, ある関数 $\kappa(s)$ を用いて,

$$\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

と表される.

定義. $\kappa(s)$ を平面曲線 $\mathbf{p}(s)$ の曲率とよぶ.

例. 例. $a > 0$ を定数とする. $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}$ については, $s = at$ となる. 実

際, $\dot{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix}$ なので, $\|\dot{\mathbf{p}}(t)\| = a$ であるから, $s(t) = \int_0^t a du = at$ であ

る. よって, $\mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} a \cos \frac{s}{a} \\ a \sin \frac{s}{a} \end{pmatrix}$ と表される. このとき, $\mathbf{e} = \mathbf{p}'(s) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{a} \\ \cos \frac{s}{a} \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{n}(s) = \begin{pmatrix} -\cos \frac{s}{a} \\ -\sin \frac{s}{a} \end{pmatrix} \text{ である. したがって,}$$

$$\mathbf{e}'(s) = \mathbf{p}''(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \cos \frac{s}{a} \\ -\frac{1}{a} \sin \frac{s}{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \mathbf{n}(s)$$

となり, $\kappa(s) = \frac{1}{a}$ となる. (定曲率)

□

定理. (フレネ-セレの公式) 次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(s) &= \kappa(s) \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s) \mathbf{e}(s) \end{aligned}$$

定理の証明. 第 1 式は定義から従う. 第 2 式を示す. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ から, $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} = 0$ がわかる. よって, $\mathbf{n}'$ は $\mathbf{e}$ と平行なので, $\mathbf{n}'(s) = h(s) \mathbf{e}(s)$ と表される. また, $\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = 0$ から, $\mathbf{e}' \cdot \mathbf{n} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}' = 0$ もわかる. したがって, $0 = \kappa(s) \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{e} \cdot h(s) \mathbf{e}(s) = \kappa(s) + h(s)$ なので, $h(s) = -\kappa(s)$ となる. よって, $\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s) \mathbf{e}(s)$ となり, 第 2 式が示された.

□

注意. フレネ-セレの公式は, 形式的に,

$$(e' \ n') = (e \ n) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

と表示される.

なお, ベクトルを横ベクトルで表している本では,

$$\begin{pmatrix} e' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}$$

と (転置された形で) 表されている. 少し紛らわしいが, もちろん表現の形が違っただけで, 同じ内容を表している. □