

【幾何学1. 演習プリント 兼 出席調査】

2025年度1学期 火曜日3コマ目 304教室 担当 石川 剛郎

学生番号

氏名

解答例

第8回の演習問題. 「定理. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ を点列コンパクト集合, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ を連続写像とすると, $f(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ は点列コンパクトである。」について,

「定理の証明. $f(A)$ 上の任意の点列 $\{y_k\}$ をとる. $y_k \in f(A)$ なので, $y_k = f(x_k)$ となる $x_k \in A$ をとることができる。」という出だしの文章から始めて証明を完成させて, その全文を書き下せ.

その他, 講義内容についての質問やコメント等があれば, 自由に, ただし簡潔に記してください. (質問・コメントは成績評価とは無関係.)

演習問題の解答 と, もしあれば質問・コメント. (スペースが足りなくなったときは, 表면에その旨を明示して, 裏面を使ってよいです.)

解答例.

定理の証明. $f(A)$ の任意の点列 $\{y_k\}$ をとる. $y_k \in f(A)$ なので, $y_k = f(x_k)$ となる $x_k \in A$ をとることができる.

A は点列コンパクトなので点列 $\{x_k\}$ の部分列 $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ で A の点に収束するものが存在する. $c = \lim_{l \rightarrow \infty} x_{k_l}$ とおく. $c \in A$ である. f は c で連続だから, $\{f(x_{k_l})\}$ は $f(c)$ に収束する. したがって $\{y_k\}$ の部分列 $\{y_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ は $f(c) \in f(A)$ に収束する.

よって $f(A)$ は点列コンパクトである.