

【幾何学1. 演習プリント 兼 出席調査】

2025年度1学期 火曜日3コマ目 304教室 担当 石川 剛郎

学生番号

氏名

解答例

第6回の演習問題. r を正の数とする.

$$B := \bar{B}(\mathbf{0}, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{0}, x) \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$$

が有界閉集合であることを証明せよ.

その他, 講義内容についての質問やコメント等があれば, 自由に, ただし簡潔に記してください. (質問・コメントは成績評価とは無関係.)

演習問題の解答 と, もしあれば質問・コメント. (スペースが足りなくなったときは, 表
面にその旨を明示して, 裏面を使ってよいです.)

解答例

(有界なこと) $B = \bar{B}(\mathbf{0}, r)$ だから B は有界.

(閉集合なこと) 任意に $a \in \bar{B}$ をとる.

このとき B の点列 a_n で a に収束するものがある.

任意の $\varepsilon > 0$ に対し番号 N があって $N \leq n$ ならば
 $d(a_n, a) < \varepsilon$ となる. すると

$$d(\mathbf{0}, a) \leq d(\mathbf{0}, a_n) + d(a_n, a) < r + \varepsilon$$

が成り立つ. ε は任意の正の数なので

$$d(\mathbf{0}, a) \leq r$$

よって $a \in B$ したがって $\bar{B} \subseteq B$. ($B \subseteq \bar{B}$ だから)

よって $\bar{B} = B$, したがって B は閉集合.

以上により B は有界閉集合である.

//

(おかしなもので $A = \bar{B}(\mathbf{0}, r)$ とすればよかったです)