

【幾何学1. 演習プリント 兼 出席調査】

2025年度1学期 火曜日3コマ目 304教室 担当 石川 剛郎

学生番号

氏名

解答例

第5回の演習問題. A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合, x を $\mathbb{R}^n$ の点とする. 2つの命題

(a) x は A の外点である. (b) x は A の触点でない.

について次の問いに答えよ.

(1) 次の定義

「 x が A の外点であるとは, 正の数 δ が存在して, x の δ -近傍 $B(x, \delta)$ と A の () が () である.」 ことである

の空白を埋めて完成させた定義文の全文を書き下せ.

(2) 次の定義

「 x が A の触点であるとは, 任意の正の数 ε に対して, x の ε -近傍 $B(x, \varepsilon)$ と A の () が () でない.」 ことである

の空白を埋めて完成させた定義文の全文を書き下せ.

(3) 命題 (a) と命題 (b) が同値であることを証明せよ.

その他, 講義内容についての質問やコメント等があれば, 自由に, ただし簡潔に記してください. (質問・コメントは成績評価とは無関係.)

演習問題の解答 と, もしあれば質問・コメント. (スペースが足りなくなったときは, 表面にその旨を明示して, 裏面を使ってよいです.)

解答例 (1) x が A の外点であるとは, 正の数 δ が存在して, x の δ -近傍 $B(x, \delta)$ と A の共通部分が空集合である. ことである

(2) x が A の触点であるとは, 任意の正の数 ε に対して, x の ε -近傍 $B(x, \varepsilon)$ と A の共通部分が空集合でない. ことである

(3) (a) $\Leftrightarrow$ 「 $\exists \delta > 0, B(x, \delta) \cap A = \emptyset$ 」 $\Leftrightarrow$ 「 $\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$ 」でない
 $\Leftrightarrow$ 「 $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ 」でない $\Leftrightarrow$ (b)
 δ を一斉に ε に替える

(3) の別解.

(a) $\Rightarrow$ (b) : (a) を仮定し (b) を否定して矛盾を導く (背理法)

(b) の否定は 「 $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ 」 であり

(a) 「 $\exists \delta > 0, B(x, \delta) \cap A = \emptyset$ 」 と矛盾する. したがって (a) $\Rightarrow$ (b) が成立.

(b) $\Rightarrow$ (a) : x が A の触点でないとする $\Rightarrow$ 「 $\exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ 」

となり (記号が異なるだけで) x が A の外点であることを意味する

以上により (a) と (b) は同値である.