

【幾何学1. 演習プリント 兼 出席調査】

2025年度1学期 火曜日3コマ目 304教室 担当 石川 剛郎

学生番号

氏名

解答例

第3回の演習問題. (第3回は4月30日(水3)に実施)

写像 $f: 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ を $2m \in 2\mathbb{Z}$ に対し, $f(2m) = \frac{2m}{3}$ で定める. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ について,
 $f^{-1}(\mathbb{Z}) := \{2m \in 2\mathbb{Z} \mid f(2m) \in \mathbb{Z}\} = 6\mathbb{Z}$ であることを示せ.

その他, 講義内容についての質問やコメント等があれば, 自由に, ただし簡潔に記してください. (質問・コメントは成績評価とは無関係.)

演習問題の解答 と, もしあれば質問・コメント. (スペースが足りなくなったときは, 表面に明示して裏面を使ってよいです.)

解答例 $f^{-1}(\mathbb{Z}) \subseteq 6\mathbb{Z}$ と $f^{-1}(\mathbb{Z}) \supseteq 6\mathbb{Z}$ を示す.

① $f^{-1}(\mathbb{Z}) \subseteq 6\mathbb{Z}$: $2m \in f^{-1}(\mathbb{Z})$ をとる. $f(2m) = \frac{2m}{3}$ は整数
 $\frac{2m}{3} = n$ とおく $2m = 3n$ (2と3は互いに素なので) m は3の倍数である.

$m = 3l$ (l は整数) とおくと $2m = 6l \in 6\mathbb{Z}$. おて $f^{-1}(\mathbb{Z}) \subseteq 6\mathbb{Z}$

② $f^{-1}(\mathbb{Z}) \supseteq 6\mathbb{Z}$: $6l \in 6\mathbb{Z}$ をとる. ($6l \in 2\mathbb{Z}$ である)

$f(6l) = \frac{6l}{3} = 2l \in \mathbb{Z}$ おて $6l \in f^{-1}(\mathbb{Z})$

したがって $f^{-1}(\mathbb{Z}) \supseteq 6\mathbb{Z}$

以上により $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 6\mathbb{Z}$

//