

【幾何学1. 演習プリント 兼 出席調査】

2025年度1学期 火曜日3コマ目 304教室 担当 石川 剛郎

学生番号

ふりがな

氏名

解答例

第11回の演習問題.

(1) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ (距離関数 d はユークリッド距離) について, $(\mathbb{R}^n, d)$ は点列コンパクト空間でない, つまり, $\mathbb{R}^n$ が $(\mathbb{R}^n, d)$ の点列コンパクト集合でない (このことは講義で説明済み). そこで, $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ で「任意の部分列が収束しないような点列」の具体例を1つ与えて説明せよ.

(2) 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ 1 & (0 \leq x), \end{cases}$ により定義する. $y = f(x)$ のグラフを描き, $\mathbb{R}$ の開区間 $U = (0, 2)$ の逆像 $f^{-1}(U)$ を求め, $f^{-1}(U)$ が $\mathbb{R}$ の開集合でないことを確認せよ. (したがって, f は連続関数でないことが改めて示される.)

その他, 講義内容についての質問やコメント等があれば, 自由に, ただし簡潔に記してください. (質問・コメントは成績評価とは無関係.)

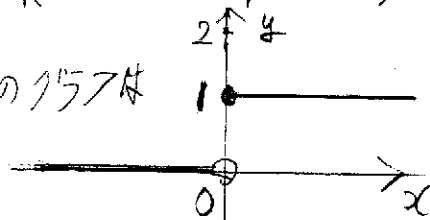
演習問題の解答 と, もしあれば質問・コメント. (スペースが足りなくなったときは, 表면에その旨を明示して, 裏面を使ってよいです.)

解答例

(1) $x_m = (m, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-1})$ とおく. $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ の任意の部分列 $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $x_{m_k} = (m_k, 0, \dots, 0)$ $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$

に対して $m_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) なので $\{x_{m_k}\}$ は収束しない. //

(2) $y = f(x)$ のグラフは



となる

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < f(x) < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x\} = [1, \infty) \end{aligned}$$

$f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}$ の開集合でない.

(なぜなら, $1 \in f^{-1}(U)$, 任意 $\varepsilon > 0$ に対し $(- \varepsilon, \varepsilon) \not\subset f^{-1}(U)$ に含まれない. 実際 $- \frac{\varepsilon}{2} \in (- \varepsilon, \varepsilon)$ だが $- \frac{1}{2} \notin [1, \infty) = f^{-1}(U)$) //