

【幾何学1. 演習プリント 兼 出席調査】

2025年度1学期 火曜日3コマ目 304教室 担当 石川 剛郎

学生番号

氏名

解答例

第10回の演習問題. (X, d) を距離空間, $A \subseteq X, x \in X$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) x が A の触点であるとはどういう意味か? その定義を述べよ.
- (2) x が A の内点であるとはどういう意味か? その定義を述べよ.
- (3) x が A の境界点であるとはどういう意味か? その定義を述べよ.
- (4) 「(i) x が A の触点であること」と, 「(ii) x が A の内点または境界点であること」が同値 (必要十分) であることを示せ.

その他, 講義内容についての質問やコメント等があれば, 自由に, ただし簡潔に記してください. (質問・コメントは成績評価とは無関係.)

演習問題の解答 と, もしあれば質問・コメント. (スペースが足りなくなったときは, 表面にその旨を明示して, 裏面を使ってよいです.)

解答例 $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ である

- (1) x が A の 触点 とは, 任意の正の数 ε について $B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となることである.
- (2) x が A の 内点 であるとは, ある正の数 δ があって $B_d(x, \delta)$ が A に含まれることである.
- (3) x が A の 境界点 とは, 任意の正の数 ε について $B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ であり, かつ, $B_d(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ となることである.

(4) (i) $\Rightarrow$ (ii) を示す. x が A の 触点 とすると, $\forall \varepsilon > 0$ について $B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となる. 内点でないとする. $\forall \varepsilon > 0$ について $B_d(x, \varepsilon)$ が A に含まれないから $B_d(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ となる. したがって $\forall \varepsilon > 0$, $B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B_d(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ となり, x は A の 境界点 である. したがって x は A の 内点または境界点 である.

(ii) $\Rightarrow$ (i) x が A の 内点 ならば, 特に $x \in A$ なので, 任意の $\varepsilon > 0$ について $B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となり 触点 である

裏につづく

(つづき)

x が" A の境界点ならば", $\forall \varepsilon > 0$, $B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ なので
触点である, したがって x が" A の内点または境界点ならば"
 x は A の触点である

以上により (i) $\Leftrightarrow$ (ii) が示された

