

① 距離空間

定義. X を集合とする. X と X の直積集合上の関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,

d が X 上の 距離関数 (distance function)

$\Leftrightarrow$ d が次の4条件を満たす. 任意の $x, y, z \in X$ に対し

1. (対称性) $d(x, y) = d(y, x)$
2. (正値性1) $d(x, y) \geq 0$
3. (正値性2) $d(x, y) = 0$ になるのは $x = y$ のときに限る.
4. (三角不等式) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

・ 距離関数をも単に 距離 (distance) とも言う.
また $d(x, y)$ を x と y の (d に関する) 距離と言う.

・ 集合 X と、その上の距離関数 d の組 (X, d) を 距離空間 (metric space) とよぶ. つまり
距離が指定された集合のことである. (遠近さが定量的に定まった空間)

例 $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$ ユークリッド距離

$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は定義の条件1, 2, 3, 4をすべて満たすので
 d は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である. ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d)$ はユークリッド距離が指定された距離空間である.

例 $c > 0$ に対し ユークリッド距離 d の c 倍 cd も $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である ($c = \frac{1}{10^4}$ のとき $cd(x, y)$ は1万分の1の地図上の距離である)

9-2

例 $X = \mathbb{R}^2$ 上で

$d'(x, y) := \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$
 とおくと $d': \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ も $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数である。

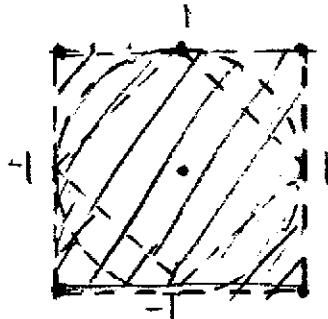
例 $X = \mathbb{R}^2$ 上で

$d''(x, y) := |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$
 とおくと $d'': \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ も $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数である。

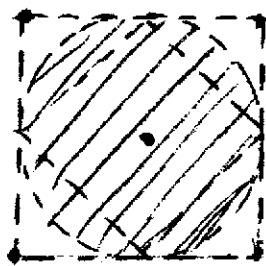
$\mathbb{R}^2$ 上のユークリッド距離 $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$
 について

$$d'(x, y) \leq d(x, y) \leq d''(x, y) \leq 2d'(x, y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

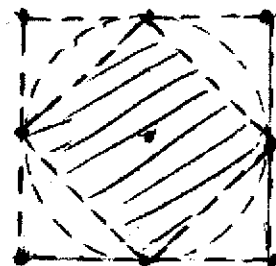
が成り立つ。



$B_{d'}(0, 1)$



$B_d(0, 1)$



$B_{d''}(0, 1)$

例 $X = \{a, b\}$ $a \neq b$ とする

$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を $d(a, a) = d(b, b) = 0$, $d(a, b) = d(b, a) = 1$
 と定めると d は X 上の距離関数となる。

例 X を集合, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を, $x, y \in X$ に対し

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & (x \neq y \text{ のとき}) \\ 0 & (x = y \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると d は X 上の距離関数となる。

(9-3)

 $\mathbb{R}$ の有限閉集合

例 X を 閉区間 $[a, b]$ 上の 実数値連続関数の全体の集合とする:

$$X = \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ 連続} \}$$

X の 2 つの要素 f, g に対し, $|g - f|$ も $[a, b]$ 上連続だから, $[a, b]$ 上で 最大値をもつ
そこで

$$d(f, g) := \max_{a \leq x \leq b} |g(x) - f(x)|$$

とおく.

例題 上の例の d が X 上の 距離関数になることを確かめよ.

解答例. 1. $d(g, f) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |g(x) - f(x)| = d(f, g).$

2. 各 $x \in [a, b]$ で $|g(x) - f(x)| \geq 0$ だから $d(f, g) \geq 0$

3. $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \quad |g(x) - f(x)| = 0$
 $\Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \quad f(x) = g(x)$
 $\Leftrightarrow f = g$

4. $f, g, h \in X$, $x \in [a, b]$ とする

$$|h(x) - f(x)| \leq |h(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$$

$$\leq \max_{x \in [a, b]} |h(x) - g(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)|$$

$$= d(g, h) + d(f, g)$$

$$= d(f, g) + d(g, h)$$

$x \in [a, b]$ は任意だから

$$d(f, h) = \max_{x \in [a, b]} |h(x) - f(x)| \leq d(f, g) + d(g, h)$$

$\mathbb{R}$ での
三角不等式

//

9-4

定義 (点列の収束) (X, d) を距離空間, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X 上の点列とする. 点列 $\{x_n\}$ が 収束する とは, X の点 a が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0$$

(これは言い換えれば " $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists N, N \leq n \Rightarrow d(a, x_n) < \varepsilon$ ")

実数列

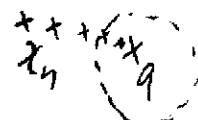
となることである. このとき $\{x_n\}$ は a に収束すると言い, a を $\{x_n\}$ の極限 (極限点) とよび,

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ と表す.}$$

定義 (ε -近傍) $B_d(a, \varepsilon) := \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$.

例題. (X, d) を距離空間, $\{x_n\}$ を X 上の点列 $a \in X$ とする. このとき 次の 2 条件が 必要十分条件 であることを示せ

(I) $\{x_n\}$ が a に収束する.



(II) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 番号 N が存在して $N \leq n$ ならば $x_n \in B_d(a, \varepsilon)$.

解答例 (I) $\Rightarrow$ (II) (I) を仮定する. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0$ である. したがって 任意の $\varepsilon > 0$ に対して 番号 N があって $N \leq n$ ならば $d(a, x_n) < \varepsilon$ が成り立つ. これは $x_n \in B_d(a, \varepsilon)$ を意味する. よって (II) が成り立つ.
(II) $\Rightarrow$ (I) (II) を仮定する. このとき 任意の $\varepsilon > 0$ に対して 番号 N が存在して $N \leq n$ ならば $x_n \in B_d(a, \varepsilon)$ つまり $d(a, x_n) < \varepsilon$ となる. これは $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0$ を意味する. よって (I) が成り立つ.
以上から (I) $\Leftrightarrow$ (II) が成り立つ //

(9-5)

注) 点列 $\{x_n\}$ の極限点 a は存在すればただ1つに定まる。実際 もう1点 $b \in X$ があって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(b, x_n) = 0$$

とする。このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して番号 N があって $N \leq n$ ならば $d(a, x_n) < \varepsilon$ となり、また番号 N' があって $N' \leq n$ ならば $d(b, x_n) < \varepsilon$ となる。 $N'' = \max\{N, N'\}$ とすれば、 $N'' \leq n$ ならば $d(a, x_n) < \varepsilon$ かつ $d(b, x_n) < \varepsilon$ となる。距離の性質(三角不等式など)から $0 \leq d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) = d(a, x_n) + d(b, x_n) < 2\varepsilon$ 。 ε は任意の正数だから $d(a, b) = 0$ 。よって $a = b$ となる。

定義、(距離空間における開集合) ← (4-3) を参照

(X, d) を距離空間とする、 $U \subseteq X$ とする。

U が (d) に関する X の 開集合

$\Leftrightarrow$ 任意の $a \in U$ に対して $\delta > 0$ が存在して

$$B_d(a, \delta) \subseteq U \quad \text{が成り立つ。}$$

(U の任意の点の十分小さな近傍が U に "おぼろ" 含まれる)



手直し

※ 距離を変えれば δ 近傍が変わり 開集合かどうかでも変わるかも。

9-6

例題 (X, d) を距離空間, $a \in X$, $r > 0$ とする
このとき $B_d(a, r)$ が d に関する X の開集合である
ことを示せ

解答例 $x \in B_d(a, r)$ を任意にとる. $d(a, x) < r$ である.
 $r - d(a, x) > 0$ である. $0 < \delta < r - d(a, x)$ となるように δ を選ぶ.
このとき $B_d(x, \delta) \subseteq B_d(a, r)$ を示す.
 $y \in B_d(x, \delta)$ を任意にとる, $d(x, y) < \delta$ である.
このとき $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \delta < d(a, x) + r - d(a, x) = r$.
が成り立つ. したがって $y \in B_d(a, r)$. したがって $B_d(x, \delta) \subseteq B_d(a, r)$.
つまり $\forall x \in B_d(a, r), \exists \delta > 0, B_d(x, \delta) \subseteq B_d(a, r)$ が成立,
したがって $B_d(a, r)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

定義 (距離空間における開近傍, 近傍) $\leftarrow \begin{matrix} \varepsilon\text{-近傍に限らぬ} \\ \text{一般的用語} \end{matrix}$

(X, d) を距離空間, $U \subseteq X$, $a \in X$ とする,

U が a の開近傍 $\Leftrightarrow a \in U$ かつ U は X の開集合

$A \subseteq X$, $a \in X$ とする.

A が a の近傍 $\Leftrightarrow a \in A$ かつ $(\exists U, U \text{ は } X \text{ の開集合})$
かつ $a \in U \subseteq A$

$\Leftrightarrow a \in A$ かつ $(\exists \delta > 0, B_d(a, \delta) \subseteq A)$
($\Leftrightarrow a \in A^\circ$).

演習 (X, d) 距離空間, $a \in X$ とする

A が a の近傍で B が a の近傍ならば

$A \cap B$ は a の近傍であることを示せ,

おしまい