幾何学I　担当 石川剛郎　第6回

6-1

◎ $\mathbb{R}^n$の閉集合の点列による特徴付け

例題 $A \subseteq \mathbb{R}^n$とし，$\{a_k\}$をA上の点列とする．$\{a_k\}$が$\mathbb{R}^n$の中で収束するとき 極限 $a = \lim_{k\to\infty} a_k$ は $\overline{A}$ に属することを示せ

解答例 任意の$\varepsilon > 0$に対し番号Nがあって$N \leqq k$ならば$d(a, a_k) < \varepsilon$である．$a_k \in B(a, \varepsilon) \cap A$だから$B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$である．よって$a \in \overline{A}$となる //

例題 $A \subseteq \mathbb{R}^n$とする．このとき次の2条件が同値(必要十分)であることを示せ．

11/6まで

(1) Aは$\mathbb{R}^n$の閉集合

(2) A上の任意の収束点列$\{a_k\}$の極限がAに属する．

解答例 (1)$\Rightarrow$(2)　Aが$\mathbb{R}^n$の閉集合とし，A上の収束点列$\{a_k\}$を任意にとる．$a = \lim_{k\to\infty} a_k$は$\overline{A}$に属する(上の例題より)．$A$は$\mathbb{R}^n$の閉集合だから$\overline{A} = A$．よって$a \in A$．

(2)$\Rightarrow$(1)　(2)を仮定する．$\overline{A} = A$を示す．任意に$a \in \overline{A}$をとる．aはAの触点だから$\forall \varepsilon > 0$ $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$である．特に$k \in \mathbb{N}$ $k \neq 0$に対し$B(a, \frac{1}{k}) \cap A \neq \emptyset$である．$a_k \in B(a, \frac{1}{k}) \cap A$ととる．$\{a_k\}$は$A$上の点列である．

$d(a, a_k) < \frac{1}{k}$ だから $\lim_{k\to\infty} d(a, a_k) = 0$

よって$a = \lim_{k\to\infty} a_k$である．(2)より $a \in A$．よって$\overline{A} \subseteq A$

よって$\overline{A} = A$ //

6-2

◎ 点列コンパクト集合

定義. $A \subseteq \mathbb{R}^n$とする

Aが<u>点列コンパクト</u> (sequentially compact)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ A上の任意の点列$\{a_k\}$の適切な<u>部分列</u>$\{a_{k_\ell}\}$がAの点に収束する.

<u>部分列</u>: 点列 $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$
に対し狭義単調増大な番号 $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_\ell < \cdots$
の部分だけとり出してできる点列

$$a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_\ell}, \cdots$$

(ℓが番号, kは部分列という目印だけの役割)
を$\{a_k\}$の部分列という. (subsequence)

定義 (有界集合) $A \subseteq \mathbb{R}^n$とする

Aが有界集合 (bounded set)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists a \in \mathbb{R}^n, \exists r > 0$

$A \subseteq B(a, r)$ $(:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) \leqq r\})$

$\iff$ $\forall b \in \mathbb{R}^n, \exists r' > 0$

$A \subseteq B(b, r')$

(!) $\Leftarrow$ ok.

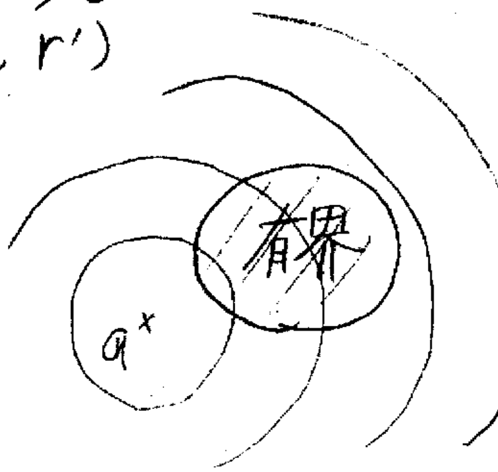
$\Rightarrow$ $\forall x \in A$ $d(a, x) < r$

$d(b, x) \leqq d(b, a) + d(a, x)$

$< d(b, a) + r$

$r' = d(b, a) + r$とおけば

$A \subseteq B(b, r')$ //



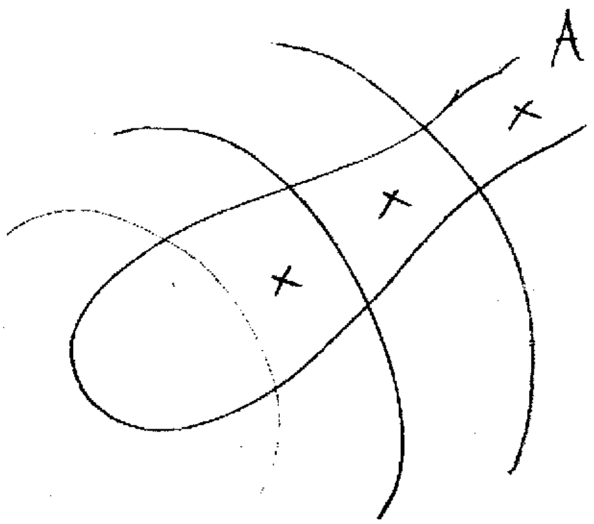
6-3

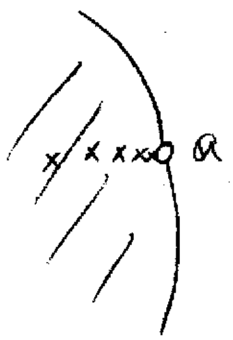
定理（ユークリッド空間の点列コンパクト集合の特徴付け）

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し

A が点列コンパクト $\Longleftrightarrow$ A が有界閉集合

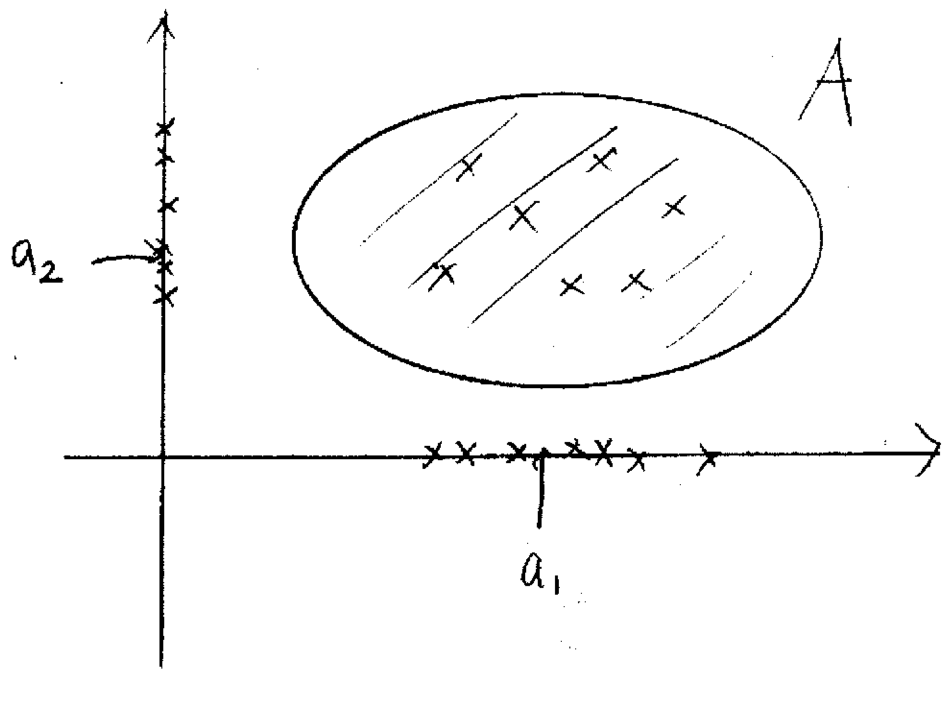
証明（$\Rightarrow$）A が点列コンパクトとする。
まず A が有界であることを示す。もし有界でないとすると、
$k=1,2,\cdots$ に対して $A \not\subseteq B(0,k)$，$a_k \in A \setminus B(0,k)$
ととると $\{a_k\}$ のどんな部分列も収束しない。矛盾。
よって A は有界。
次に A が閉集合であることを示す。もし閉集合でないとすると
$\overline{A} \setminus A \neq \emptyset$ だから $a \in \overline{A} \setminus A$ がとれる。$a \in \overline{A}$ だから
$k=1,2,\cdots$ に対し $B(a,\frac{1}{k}) \cap A \neq \emptyset$．$a_k \in B(a,\frac{1}{k}) \cap A$
をとり A の点列 $\{a_k\}$ を作る。$0 \leq d(a,a_k) < \frac{1}{k}$ だから
$a = \lim_{k\to\infty} a_k$．$\{a_k\}$ のどんな部分列も a に収束するが
$a \notin A$．よって $\{a_k\}$ の部分列は A の点に収束しない。
これは A が点列コンパクトであることに矛盾。よって A は閉集合





6-4

($\Leftarrow$) Aを有界閉集合とし, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$をA上の任意の点列とする. $a_k=(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn})$とおく.
Aは有界なので, 各数列 $\{a_{k1}\}_{k=1}^{\infty},\cdots,\{a_{kn}\}_{k=1}^{\infty}$ は有界な実数列である. 数列 $\{a_{k1}\}_{k=1}^{\infty}$ の収束部分列 $\{a_{k_l 1}\}_{l=1}^{\infty}$ を選ぶ.
それに応じて もとの数列$\{a_k\}$の部分列$\{a_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$を選ぶ. $a_1:=\lim_{l\to\infty} a_{k_l 1}$ とおく. 煩雑なので, $\{a_{k_l}\}$を改めて$\{a_k\}$と書いておく. a_kの第1座標はa_1に収束している. 次に第2成分に注目する. 数列$\{a_{k2}\}_{k=1}^{\infty}$は有界だから収束する部分列$\{a_{k_l 2}\}$を選ぶ.
それに応じて もとの数列$\{a_k\}$の部分列$\{a_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$を選ぶ
$\lim_{l\to\infty} a_{k_l 1}=a_1$である. $a_2:=\lim_{l\to\infty} a_{k_l 2}$ とおく. 以下同様に$\{a_k\}$の部分列の部分列… と選んで, すべての座標が$a_1,a_2,\cdots,a_n$に収束するようにする. このとき部分列は$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$に収束する. //



演習 $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n=(a_{n1}, a_{n2})$ と $a=(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ について次の2条件が同値(必要十分)であることを示せ.

(1) $\{a_n\}$ が a に収束する.

(2) $\{a_{n1}\}$ が a_1 に収束し, かつ $\{a_{n2}\}$ が a_2 に収束する.

◎ $\mathbb{R}^n$ の部分集合のコンパクト性

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ とする

定義 (開被覆(かいひふく)) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合の族とする.

$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が A の開被覆 (open covering (オープン カバリング))

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

(つまり $\forall a \in A, \exists \lambda \in \Lambda, a \in U_\lambda$)

定義 (コンパクト集合) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ とする.

A が $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合 (compact set)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ A の任意の開被覆は有限部分被覆をもつ.

すなわち, 有限個の $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \Lambda$ が存在して

$$A \subseteq U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2} \cup \cdots \cup U_{\lambda_r}$$

注: コンパクトということは任意の開被覆を与えたときに, すでに有限個で覆われている, ということ.

例 $\mathbb{R}^n$の有限集合Aは点列コンパクトであり
コンパクトである.
実際 $A=\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(r)}\}$とする. A上の
任意の点列$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$をとる. このとき, あるiがあって
無限個のkについて $a_k=x^{(i)}$となる(引き出し論法).
そこで $1\leq k_1<k_2<\cdots<k_l<\cdots$ を $a_{k_l}=x^{(i)}$
$(l=1,2,3,\cdots)$となるようにとると 部分列$\{a_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$は
定点列だから収束する. よってAは点列コンパクトである.
また $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を Aの任意の開被覆とする.
任意のiについて $\exists\lambda_i\in\Lambda$があって $x^{(i)}\in U_{\lambda_i}$となる.
このとき, $A\subseteq U_{\lambda_1}\cup U_{\lambda_2}\cup\cdots\cup U_{\lambda_r}$となる. よって
Aはコンパクトである.

※ コンパクト集合とは, 有限集合とは限らないが,
ある種の"有限性"を有するもののことと言える.

定理 $A\subseteq\mathbb{R}^n$に対し
Aがコンパクト集合 $\Leftrightarrow$ Aが有界閉集合
($\Leftrightarrow$ Aが点列コンパクト集合)

証明 ($\Rightarrow$) Aがコンパクトとする. Aが有界でないとする.
Aの開被覆 $\{B(0,k)\}_{k=1}^{\infty}$ ($B(0,k)$は0のk近傍)
は有限部分被覆を持たない(持ったとしたら有界となる).
矛盾である. よってAは有界である.
次に Aが閉集合でないとする. $\bar{A}\neq A$である
$a\in\bar{A}\setminus A$ をとる.

$$U_k=\{x\in\mathbb{R}^n \mid d(a,x)>\frac{1}{k}\} \quad k=1,2,\cdots$$

とおくとU_kは$\mathbb{R}^n$の開集合, $U_1\subsetneq U_2\subsetneq\cdots$, $A\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}U_k$

$\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ は A の開被覆であるが, 有限部分被覆は存在しない. (もし $\exists k$ $A \subseteq U_k$ ならば $A \cap B(a, \frac{1}{k}) = \emptyset$ となり $a \in \overline{A}$ に反する.) よって矛盾. したがって A は閉集合.

($\Leftarrow$) A が有界閉集合とする. A がコンパクトでないとする. A の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で有限部分被覆を持たないものをとる.
A は有界だから $\exists c_1, d_1, c_2, d_2, \cdots, c_n, d_n \in \mathbb{R}$

$$A \subseteq [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \cdots \times [c_n, d_n] := C$$

となる直方体 C を 2^n 等分すると, ある小直方体 $C^{(1)}$ があって $A \cap C^{(1)}$ の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は有限部分被覆を持たない. 点 $a_1 \in A \cap C^{(1)}$ をとる. $C^{(1)}$ を 2^n 等分すると, その中の小直方体 $C^{(2)}$ があって $A \cap C^{(2)}$ の開被覆 $\{U_\lambda\}$ は有限部分被覆を持たない. $a_2 \in A \cap C^{(2)}$ をとる.
同様に $C^{(3)}, C^{(4)}, \cdots$, $a_3, a_4, \cdots$ ととる. A の点列 $\{a_k\}$ は収束する. (a_k の各座標はコーシー列)
A は閉集合だから $a = \lim_{k \to \infty} a_k \in A$ である.
$\{U_\lambda\}$ は A の開被覆だから, $\exists \lambda \in \Lambda$, $a \in U_\lambda$
すると U_λ は開集合だから, 十分大きな l について (十分小さな $C^{(l)}$, $a \in C^{(l)}$) について, $A \cap C^{(l)} \subseteq U_\lambda$ となり ただ1つの U_λ におおわれる. 矛盾.
したがって A はコンパクトである //

注) $\mathbb{R}^n$ に限らず一般の距離空間でも

A がコンパクト $\Longleftrightarrow$ A が点列コンパクト

と A がコンパクト $\Longrightarrow$ A が有界閉集合

は成立し, $\mathbb{R}^n$ の場合は逆も正しいが一般には成立しない!

A がコンパクト $\not\Longleftarrow$ A が有界閉集合

おしまい