幾何学I　担当 石川剛郎　　第5回


## ◎ $\mathbb{R}^n$ の部分集合の内点・外点・境界点

(← アールエヌ)

部分集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ が与えられると，Aとの位置関係に応じて $\mathbb{R}^n$ の点が3種類に分けられる

定義: $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ とする.

(1) $x$ が A の内点 (interior point)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \delta > 0,\ B(x, \delta) \subseteq A$

(2) $x$ が A の外点 (exterior point)

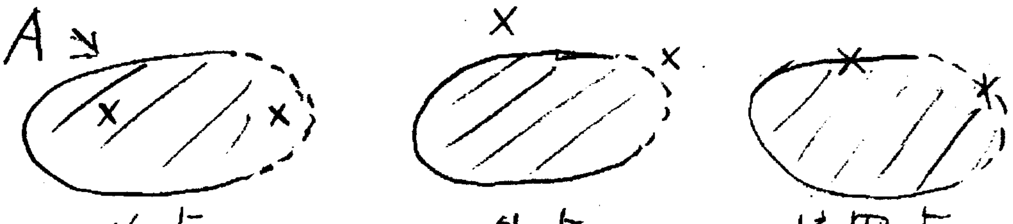
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x$ が $\mathbb{R}^n \setminus A$ の内点

$\Longleftrightarrow$ $\exists \delta > 0,\ B(x, \delta) \cap A = \phi$

(3) $x$ が A の境界点 (boundary point)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x$ が A の内点でも外点でもない

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0,\ (B(x, \varepsilon) \cap A \neq \phi$ かつ $B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \phi)$




内点　　　外点　　　境界点

---

Aの内部　　　Aの外部　　　Aの境界

(4) $x$ が $A$ の触点 (adherent point) ← "$A$に触れている"

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

(5) $x$ が $A$ の集積点 (accumulation point)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x$ が $A \setminus \{x\}$ の触点

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

(6) $x$ が $A$ の孤立点 (isolated point)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x \in A$ かつ ($x$ は $A$ の集積点でない)

---

例題 $A$ が $\mathbb{R}^n$ の部分集合, $x$ が $\mathbb{R}^n$ の点とするとき

(i) $x$ が $A$ の触点 $\Longleftrightarrow$ (ii) $x$ が $A$ の内点または境界点

が成り立つことを示せ

解答例 (i) ⇒ (ii). (i)を仮定する。$x$ が $A$ の内点でないと仮定する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ だが, $x$ は $A$ の内点でないので, $B(x, \varepsilon) \not\subset A$.
つまり $B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$. したがって $x$ は $A$ の境界点
よって (i) ならば (ii) が成り立つ
(ii) ⇒ (i). 対偶「(ii)でない ⇒ (i)でない」を示す.
(ii)でない, つまり $x$ が $A$ の外点とする. このとき
$\exists \delta > 0$, $B(x, \delta) \cap A = \emptyset$. したがって $x$ は $A$ の外点でない
対偶が成り立つので (ii) ⇒ (i) が成り立つ.

演習 $A$ が $\mathbb{R}^n$ の部分集合, $x$ が $\mathbb{R}^n$ の点とするとき,
「(a) $x$ が $A$ の外点 $\Longleftrightarrow$ (b) $x$ が $A$ の触点でない」
が成り立つことを 5-1 (5-2) の定義にもとづいて示せ.

## ◎ $\mathbb{R}^n$の部分集合の内部・外部・境界

定義. $A \subseteq \mathbb{R}^n$とする.

(1) Aの内点全体の集合をAの内部(インテリア)(interior)とよび $\mathrm{Int}(A)$ あるいは $A^\circ$ で表す:

$\mathrm{Int}(A) = A^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ はAの内点 $\}$

(2) Aの外点全体の集合をAの外部(exterior)とよび $\mathrm{Ext}(A)$, $A^e$ あるいは $(A^c)^\circ$ で表す　補集合の内部

$\mathrm{Ext}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ はAの外部 $\}$

(3) Aの境界点全体の集合をAの境界(boundary)とよび $\partial(A)$, $\mathrm{Bdr}(A)$, $A^b$ などと表す.

$\partial(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ はAの境界点 $\}$

こうして, $\mathbb{R}^n$ は $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Ext}(A)$, $\partial(A)$ という互いに共通部分が空である3つの部分集合の和集合となる.

(4) Aの触点全体の集合をAの閉包(クロージャー)(closure)とよび $\overline{A}$ あるいは $Cl(A)$ で表す:　adherence とも

$\overline{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ はAの触点 $\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ はAの内点または境界点 $\}$

$= \mathrm{Int}(A) \cup \partial(A) = A^\circ \cup \partial(A)$

注) $$\left.\begin{array}{l} A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq \mathbb{R}^n \\ \mathrm{Ext}(A) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{A} \\ \partial(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ \end{array}\right\} \text{が成立}$$

定理 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ とする. このとき次が成り立つ.

(i) $A^\circ$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合

(ii) $A^\circ$ は $A$ に含まれる最大の $\mathbb{R}^n$ の開集合

(iii) $A$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\Leftrightarrow$ $A^\circ = A$

証明. (i) 任意に $x \in A^\circ$ をとる. $x$ は $A$ の内点だから $\delta > 0$ が存在して $B(x, \delta) \subseteq A$ となる. $B(x, \delta)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 (4-4) だから任意 $y \in B(x, \delta)$ に対し $\delta' > 0$ が存在して $B(y, \delta') \subseteq B(x, \delta)$ となる. このとき $B(y, \delta') \subseteq A$ となる. よって $y$ は $A$ の内点となる. よって $B(x, \delta) \subseteq A^\circ$ となる. よって ($\forall x \in A^\circ, \exists \delta > 0, B(x, \delta) \subseteq A^\circ$ が成り立つから) $A^\circ$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

(ii) は「$U \subseteq A$, $U$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\Rightarrow$ $U \subseteq A^\circ$」という意味である. $U \subseteq A$, $U$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合とし, 任意に $x \in U$ をとる. $U$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合だから, $\delta > 0$ が存在して $B(x, \delta) \subseteq U$ となる. このとき $B(x, \delta) \subseteq A$ である. ($\exists \delta > 0, B(x, \delta) \subseteq A$ だから) $x$ は $A$ の内点である. つまり $x \in A^\circ$, よって $U \subseteq A^\circ$. よって (ii) が示された.

(iii) ($\Rightarrow$) $A^\circ \subseteq A$ はつねに成立. さらに $A$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合とすると, (ii) より $A \subseteq A^\circ$. よって $A^\circ = A$.
($\Leftarrow$) $A^\circ = A$ とする. (i) より $A$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合. よって (iii) が示された. //

系 $A$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\Leftrightarrow$ $A$ の任意の境界点が $A$ に属さない.

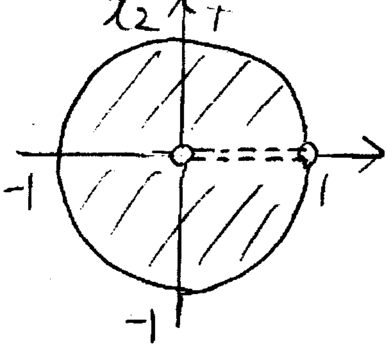
(証) 一般に $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A} = A^\circ \cup \partial(A)$ で $A^\circ \cap \partial(A) = \phi$ だから $A^\circ = A \Leftrightarrow A \cap \partial(A) = \phi$ //

例 $A = [a, b) \subseteq \mathbb{R}$ とする．$A^\circ = (a, b)$，$\overline{A} = [a, b]$

$\partial(A) = \{a, b\}$，$\mathrm{Ext}(A) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$

例 $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqq 1\} \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$

とする．

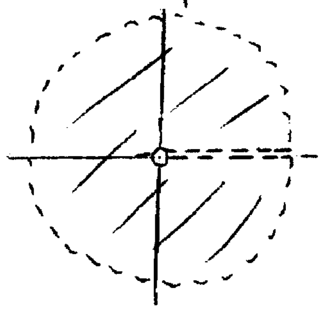


開円板から線分を除いたもの

$A$

このとき

$A^\circ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq x < 1\}$



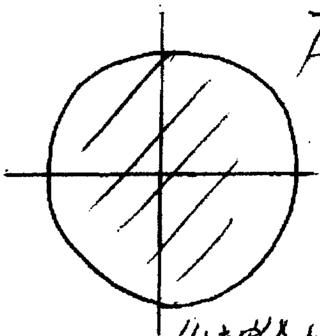
$A^\circ$

$\overline{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqq 1\}$

$\partial(A) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$

$\mathrm{Ext}(A) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 > 1\}$

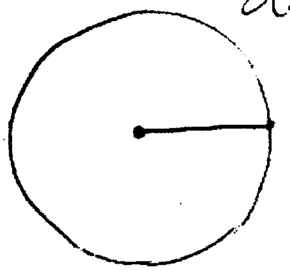
$\overline{A}$



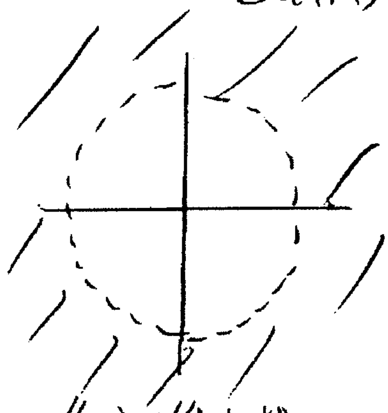
"境界"含む

↑ この場合は $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$ の境界の意味

$\partial(A)$



$\mathrm{Ext}(A)$



"境界"含まず．

## $\mathbb{R}^n$ の閉集合（へいしゅうごう）

定理　$A \subseteq \mathbb{R}^n$ とする．このとき次の2条件は互いに同値（必要十分）である．

(1)　$\overline{A} = A$　（つまり $A$ の境界点はすべて $A$ に属する）

(2)　補集合 $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合

証明　$\overline{A} = A^\circ \cup \partial(A)$ だから

条件(1) $\Longleftrightarrow$ $A = A^\circ \cup \partial(A)$

つねに成り立つこと

（$\mathbb{R}^n$ は $A^\circ$, $\partial(A)$, $\mathrm{Ext}(A)$ の互いに共通部分が空の3つに分けられるから）条件(1) $\Longleftrightarrow$ $A^c = \mathrm{Ext}(A)$

（$\mathrm{Ext}(A) = (A^c)^\circ = (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$ だから ← つねに成り立つ式）

条件(1) $\Longleftrightarrow$ $A^c = (A^c)^\circ$ $\Longleftrightarrow$ 条件(2)　//

---

定義　$A \subseteq \mathbb{R}^n$ とする．　closed subset

$A$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合 (closed set of $\mathbb{R}^n$)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$　$\overline{A} = A$

$\Longleftrightarrow$　$\mathbb{R}^n \setminus A$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合

---

例　$\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合　（$\mathbb{R}^n$ の開集合でもある）

(!!)　$\emptyset^c = \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n)^c = \emptyset$.

例　閉区間 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合（開集合ではない）

$(a, b]$, $[a, b)$ は $\mathbb{R}$ の開集合でも閉集合でもない．

5-7

定理 $A\subseteq \mathbb{R}^n$ とする. このとき次が成り立つ

(i) $\overline{A}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合

(ii) $\overline{A}$ は $A$ を含む最小の $\mathbb{R}^n$ の閉集合

(iii) $A$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合 $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}=A$

証明 (i) $(\overline{A})^c = Ext(A) = (A^c)^\circ$ ($A^c$の内部) は $\mathbb{R}^n$ の開集合. よって $\overline{A}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合.

(ii) は「$A\subseteq F$, $F$は$\mathbb{R}^n$の閉集合 $\Rightarrow$ $\overline{A}\subset F$」という意味である. $A\subseteq F$, $F$が$\mathbb{R}^n$の閉集合とする. $F^c\subseteq A^c$ である. $F$は$\mathbb{R}^n$の閉集合だから $F^c$は$\mathbb{R}^n$の開集合. よって $F^c\subseteq (A^c)^\circ$. $(A^c)^\circ=(\overline{A})^c$ だから $\overline{A}\subseteq F$が成り立つ.

(iii) は定義.

---

定理 ($\mathbb{R}^n$の閉集合系の性質)

(1) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合

(2) $F_1, F_2, \cdots, F_r$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合の(有限個の)族

$\Rightarrow$ $F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_r$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合

(3) $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合の族(無限でもよい)

$\Rightarrow$ $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合

証明 (1) は 5-6 の例

(2) $(F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_r)^c = F_1^c\cap F_2^c\cap\cdots\cap F_r^c$ である.
$F_1^c, F_2^c, \cdots, F_r^c$ はすべて $\mathbb{R}^n$ の開集合だから
$F_1^c\cap F_2^c\cap\cdots\cap F_r^c$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合. よって $F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_r$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合

(3) $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(F_\lambda^c)$. $F_\lambda^c$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合だから
$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(F_\lambda^c)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合, したがって $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合 //

おしまい