

① ユークリッド空間 (Euclidean space)

集合

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$
 $\mathbb{R}$ (アールエヌ) も考える, (x (太字) は x や $\vec{x}$ と書(こ)ともある).

定義 (ユークリッド距離) (Euclidean distance)

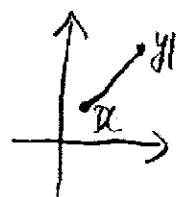
2点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ と $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

ユークリッド距離を

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} \quad \text{で定める.}$$

$$\left(= \sqrt{(y-x, y-x)} = \|y-x\| \right)$$

標準内積



例 $0 = (0, 0, \dots, 0)$, $x = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$d(0, x) = \sqrt{n}$$

(1辺が長さ1の n 次元立方体の対角線の長さ)

ユークリッド距離の性質 ← 基本!

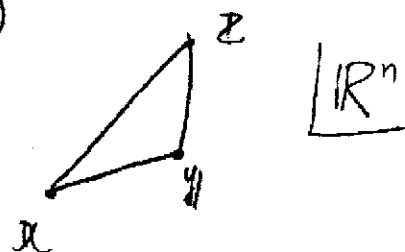
(1) (対称性) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し $d(x, y) = d(y, x)$

(2) (正値性1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し $d(x, y) \geq 0$

(3) (正値性2) $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のとき
 そのときに限る.

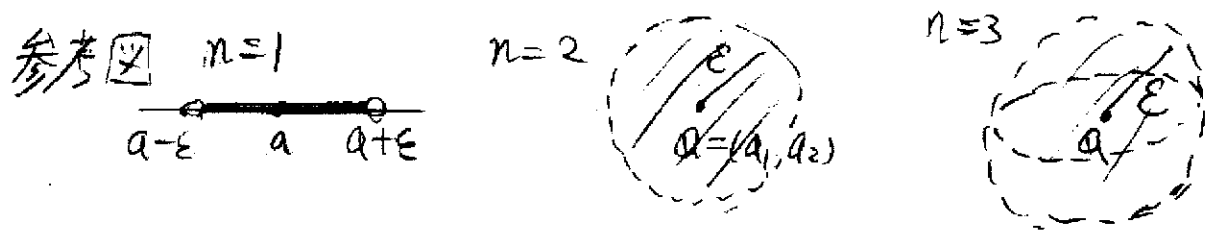
(4) (三角不等式) 任意の $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$



定義 (ε -近傍)
点 $a \in \mathbb{R}^n$, 正実数 $\varepsilon > 0$ (正であれば何でもよい)
に対し

$B(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < \varepsilon\}$ とおく
 a を中心とした半径 ε の開球体 (open ball) a と x の距離が ε より真に小さい
 a の ε -近傍 (ε -neighborhood)



定義 ($\mathbb{R}^n$ の点列の収束)

$a_1, a_2, \dots$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とする

($a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $a_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$
 $\dots$ $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$, $\dots$ である)

点列 $\{a_k \mid k=1, 2, \dots\}$ が 収束する (converge, convergent)

$\Leftrightarrow^{\text{def}} \exists a \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},$
 $N \leq k \Rightarrow a_k \in B(a, \varepsilon) \leftarrow \begin{matrix} \text{番号が十分大い} \\ a_k \text{ が入る} \end{matrix}$
 $(\Leftrightarrow d(a, a_k) < \varepsilon)$

$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n, \lim_{k \rightarrow \infty} d(a, a_k) = 0$
判別 (距離が 0 に収束する)

このとき a を $\{a_k\}$ の 極限 (極限点, 極限值) (limit)
とよび, $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ と表す.

4-3

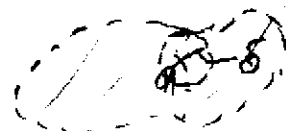
(確認) 収束する点列 $\{a_k\}$ の極限 a はただ1つに決まる, つまり a と b が $\{a_k\}$ の極限ならば $a=b$

① $a \neq b$ と仮定して矛盾を導く. $a \neq b$ とすると, $d(a, b) > 0$ である. $\varepsilon = \frac{1}{3}d(a, b) > 0$ とおく. このとき番号 N があって, $N \leq k$ ならば $d(a, a_k) < \varepsilon$ かつ $d(b, a_k) < \varepsilon$ と仮定は必ず成り立つ. しかし,

$$0 < d(a, b) \leq d(a, a_k) + d(a_k, b) = d(a, a_k) + d(b, a_k) < 2\varepsilon = \frac{2}{3}d(a, b) < d(a, b)$$
となり矛盾, おて $a=b$ //

定義 ($\mathbb{R}^n$ の ^{かちやう}開集合) $\leftarrow$ 必ず覚えて下さい! (open subset)
 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 U が $\mathbb{R}^n$ の開集合 (open set of $\mathbb{R}^n$)
 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $a \in U$ に対して, 正実数 $\delta > 0$ が存在して

$$B(a, \delta) \subseteq U$$



注 $B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < \delta\}$
 a の位置に応じて δ を小さく選べば $B(a, \delta) \subseteq U$ となる, という意味.

- 空集合は $\mathbb{R}^n$ の開集合
 ① 条件は $(a \in U) \Rightarrow (\exists \delta > 0, B(a, \delta) \subseteq U)$
 前提が偽
- $\mathbb{R}^n$ 自体は $\mathbb{R}^n$ の開集合.
 結論が真 ($\delta > 0$ は何でもOK).

(44)

例題 $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ について a の r -近傍 $B(a, r)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ.

解答例 (定義に従って論証する. ただし記号は適宜とりかえる)

$x \in B(a, r)$ を任意にとる. $d(a, x) < r$ である. $d(a, x)$
 $r - d(a, x) > 0$ である.

Uに
 該き $0 < \delta < r - d(a, x)$ となるように δ を選ぶ
 (たとえば $\delta = \frac{1}{2}(r - d(a, x))$ とする)



このとき $B(x, \delta) \subseteq B(a, r)$ を示す.

$y \in B(x, \delta)$ を任意にとる. $d(x, y) < \delta$ である.

このとき, $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y)$ (三角不等式)
 $< d(a, x) + \delta < r$ が成立

よって $y \in B(a, r)$

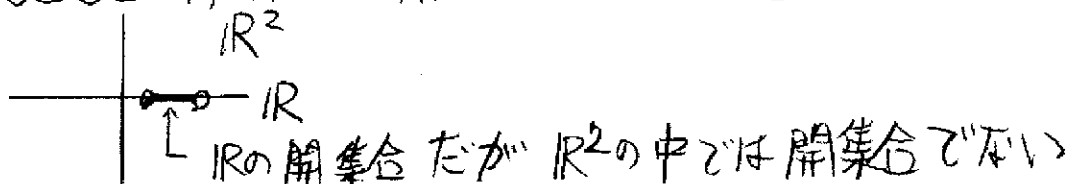
したがって $B(x, \delta) \subseteq B(a, r)$.

つまり $\forall x \in B(a, r), \exists \delta > 0, B(x, \delta) \subseteq B(a, r)$ が成立
 よって $B(a, r)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である //

例 (1) 開区間 (a, b) は $\mathbb{R}$ の開集合

(2) $[a, b)$ $(a, b]$ は $\mathbb{R}$ の開集合でない

注) どこの開集合が明言しないと混乱する



$\mathbb{R}^n$ の開集合系が満たす条件 （大切! 覚えて下さい）

命題 $\mathbb{R}^n$ の開集合系について次が成り立つ

(1) $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合, 空集合(ϕ)は $\mathbb{R}^n$ の開集合

(2) $U_1, U_2, \dots, U_r$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合の(有限個の)族
ならば 共通部分

$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_r$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合.

(3) $U_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合の(無限でもよい)族
ならば 和集合

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合

証明 (1)はすでに(4-3)で証明済.

(2) 任意に $a \in U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_r$ をとる.

任意の i ($1 \leq i \leq r$) について $a \in U_i$ で, U_i は $\mathbb{R}^n$ の
開集合だから, $\delta_i > 0$ が存在して $B(a, \delta_i) \subseteq U_i$
が成り立つ. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r\}$ とおくと $\delta > 0$ であり

$B(a, \delta) \subseteq B(a, \delta_i)$ だから $B(a, \delta) \subseteq U_i$ が任意の
 i について成り立つ, おて $B(a, \delta) \subseteq U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_r$ となる
したがって $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_r$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

(3) 任意に $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ をとる. ある $\lambda \in \Lambda$ があって,
 $a \in U_\lambda$ である. U_λ は $\mathbb{R}^n$ の開集合だから, $\delta > 0$
が存在して $B(a, \delta) \subseteq U_\lambda$ となる. このとき
 $B(a, \delta) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となる. おて $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は
 $\mathbb{R}^n$ の開集合である. //

※ 上の3条件が一般の「位相」を考える際の指針
となる.

4=6

定義 (開近傍, 近傍) $\leftarrow$ ϵ -近傍に限らず
より一般的な用語.

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ とする

U が a の 開近傍 (open neighborhood of a)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} a \in U$ かつ U は $\mathbb{R}^n$ の開集合

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ とする,

A が a の 近傍 (neighborhood of a)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} a \in A$ かつ $(\exists U, U \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の開集合})$
かつ $a \in U \subseteq A$

"近傍" という
意味はない

$\iff a \in A$ かつ $(\exists \delta > 0 \ B(a, \delta) \subseteq A)$

(a と十分近い点は A に属する)

(注) 開近傍は近傍. (U 自体をとればよい).

① $\Leftarrow U = B(a, \delta)$ とおけば $\Rightarrow \exists \delta, B(a, \delta) \subseteq U$ より

演習 $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ とする

A が a の近傍で, B が a の近傍ならば

$A \cap B$ は a の近傍であることを示せ.

おしまい.