幾何学I

担当 石川剛郎　第3回　3-1

◎ 写像

X, Y を集合とする.
X の各要素 x に対し, x それぞれに Y の1つの要素 y を対応させる対応規則を<u>写像</u> (mapping, map) という.
$f : X \to Y$ 等と表す. X を f の<u>定義域</u> (source)
Y を f の値域 (target) とよぶ. $x \in X$ が対応する要素 y を $f(x)$ と表す.

写像の相等. 写像 $f : X \to Y$, $g : Z \to W$ が等しいとは, $X = Z$ かつ $Y = W$ かつ $(\forall x \in X,\ f(x) = g(x))$ が成立つことである.

$A \subseteq X$ に対し

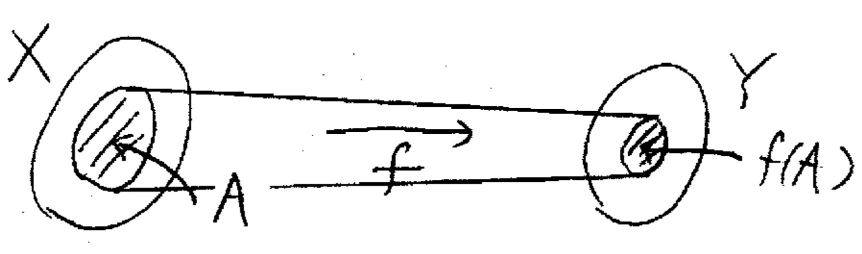
$$f(A) := \{ y \in Y \mid \text{ある } x \in A \text{ について } y = f(x) \}$$
$$= \{ f(x) \mid x \in A \}$$

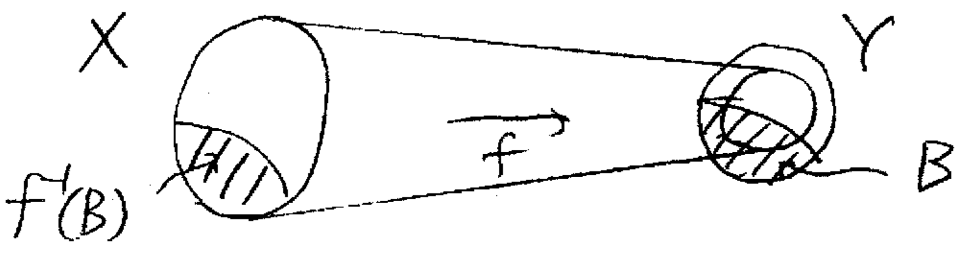
A の f による<u>像</u> (image)

$B \subseteq Y$ に対し

$$f^{-1}(B) := \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$$
$$= \{ x \in X \mid \text{ある } y \in B \text{ について } y = f(x) \}$$

B の f による逆像 (inverse image)





整数全体　有理数全体

例題 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ を $m \in \mathbb{Z}$ に対し $f(m) := \frac{m}{2}$ で定める。$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ に対し $f^{-1}(\mathbb{Z})$ を求めよ。

解答例. $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} \left(= \{0, \pm 2, \pm 4, \cdots\}\right)$ を示す。

$\subseteq$: $m \in f^{-1}(\mathbb{Z})$ を任意にとる。$f(m) \in \mathbb{Z}$ なので $n \in \mathbb{Z}$ があって $\frac{m}{2} = n$　よって $m = 2n \in 2\mathbb{Z}$.

$\supseteq$: $m \in 2\mathbb{Z}$ を任意にとる。このとき $n \in \mathbb{Z}$ があって $m = 2n$ となる。$f(m) = \frac{2n}{2} = n \in \mathbb{Z}$, よって $m \in f^{-1}(\mathbb{Z})$.

したがって $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$.

別解. $m \in \mathbb{Z}$ に対し
$m \in f^{-1}(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow$ ある $n \in \mathbb{Z}$ があって $\frac{m}{2} = n$
$\Leftrightarrow$ ある $n \in \mathbb{Z}$ があって $m = 2n \Leftrightarrow m \in 2\mathbb{Z}$

よって $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}$.

演習 $f: 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ を $m \in \mathbb{Z}$ に対し $f(m) = \frac{m}{3}$ で定める。$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ に対し $f^{-1}(\mathbb{Z}) = 6\mathbb{Z}$ を示せ。

注) 逆像 $f^{-1}(B)$ を(特別な場合を除いて) B の "f^{-1}" による像と考えてはいけない。

$f: X \to Y$ を写像とする

f が単射 (injective, injection)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x, x' \in X$, $x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$

$\Longleftrightarrow$ $x, x' \in X$, $f(x) = f(x')$ ならば $x = x'$　$\updownarrow$ 対偶

写像 $f: X \to Y$ が<u>全射</u>(surjective, surjection) サージェクション

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $y \in Y$ に対し $x \in X$ が存在して $y = f(x)$

$\Longleftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X \ \ y = f(x) \Longleftrightarrow f(X) = Y$

写像 $f: X \to Y$ が<u>全単射</u>(bijective, bijection) バイジェクション

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f が単射かつ全射

1対1対応ともいう。

$\Longleftrightarrow$ 任意の $y \in Y$ に対して ただ1つの $x \in X$ が存在して $y = f(x)$

($\Longleftrightarrow \forall y \in Y, \exists! \, x \in X, \ y = f(x)$)

$\boxed{f\text{が全単射のとき}}$ 対応 $y \mapsto x$ によって写像 $f^{-1}: Y \to X$ が定まるが, これを f の<u>逆写像</u>という. (inverse mapping)

例 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定める. f は単射でも全射でもない. f の定義域を $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ に制限して $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ と考えれば単射になる. また値域を $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ に制限して $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と考えれば全射になる. さらに定義域も制限して $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と考えれば全単射になる. 逆写像は $y \mapsto \sqrt{y}$ となる.

※ 逆像と逆写像はまったく異なるものである.

<u>写像の合成</u>(composition)

写像 $f: X \to Y$ と写像 $g: Y \to Z$ に対し
写像 $g \circ f: X \to Z$ を $x \in X$ に対し
$(g \circ f)(x) := g(f(x))$ により定める.

例題 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ を写像とする.

(1) f が単射で g が単射ならば $g \circ f$ は単射であることを示せ.

(2) f が全射で g が全射ならば $g \circ f$ は全射であることを示せ.

(3) f が全単射で g が全単射ならば $g \circ f$ は全単射であり 逆写像は $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ となることを示せ.

解答例 (1) 定義にしたがって示す. $x, x' \in X$, $x \neq x'$ とする
f が単射だから $f(x) \neq f(x')$ である. g が単射だから
$g(f(x)) \neq g(f(x'))$ よって $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x')$.
したがって $g \circ f$ は単射である.

(2) は演習問題とする

(3) (1) から $g \circ f$ は単射であり, (2) から $g \circ f$ は全射であるから $g \circ f$ は全単射である. 任意の $z \in Z$ に対し ただ1つの $y \in Y$, $x \in X$ をとって $g(y) = z$, $f(x) = y$ とすると, $y = g^{-1}(z)$, $x = f^{-1}(y)$ であるから, $x = f^{-1}(g^{-1}(z))$ $= (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$ 一方 $(g \circ f)(x) = z$ だから $x = (g \circ f)^{-1}(z)$
よって任意の $z \in Z$ に対し $(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$ が成り立つ. したがって $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$ である //

• べき集合 (power set)

集合 X の部分集合の全体の集合を X の<u>べき集合</u>とよび 記号 $\mathcal{P}(X)$ (あるいは 2^X) で表す.

$\mathcal{P}(X)$ と $\{f : X \to \{0,1\}\}$ X から $\{0,1\}$ への写像全体 には次のように全単射を構成できる

"特性関数"

$$\chi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{f : X \to \{0,1\}\}$$

カイ

$$X \supseteq A \longmapsto \chi(A) : X \to \{0,1\},\ \chi(A)(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

Xを集合，$X\times X$をその直積集合とする．$X\times X$の任意の部分集合 $R\subseteq X\times X$ を2項関係とよぶ．(binary relation)
$x\sim x'$（xとx'に関係あり）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(x,x')\in R$．

定義：2項関係 $R\subset X\times X$ が同値関係 (equivalence relation)
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) 任意の $x\in X$ に対して $(x,x)\in R$
(ii) $(x,x')\in R$ ならば $(x',x)\in R$
(iii) $((x,x')\in R$ かつ $(x',x'')\in R)$ ならば $(x,x'')\in R$
$\overset{\text{言い換え}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $x\sim x$ （反射則）
(ii) $x\sim x'$ ならば $x'\sim x$ （対称則）
(iii) ($x\sim x'$ かつ $x'\sim x''$) ならば $x\sim x''$ （推移則）

同値関係 $\sim$ について $x\sim x'$ のとき xとx'は同値である (equivalent) という．

例題　nを正の整数とする．$\mathbb{Z}$上の2項関係を
$$R:=\{(k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid k-l \text{ は } n \text{ の倍数である}\}$$
$$=\{(k,l)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid \exists u\in\mathbb{Z},\ k-l=un\}$$
で定める．Rが同値関係であることを示せ．

解答例　$(k,l)\in R$ のとき $k\sim l$ と書く
(i) $k-k=0$ は nの倍数なので $k\sim k$
(ii) $k\sim l$ とする．$u\in\mathbb{Z}$があって $k-l=un$．すると
$l-k=(-u)n$ よって $l\sim k$．

(iii) $k \sim l$, $l \sim m$ とする．
$u, w \in \mathbb{Z}$ があって $k-l=un$, $l-m=wn$
よって $k-m=(k-l)+(l-m)=un+wn=(u+w)n$
したがって $k \sim m$ //

注）例題の同値関係について $k \sim m$ のとき，
$k \equiv m \mod. n$ と書き，k と m は n を法として合同という．

演習　例題の同値関係 $\sim$ について次を示せ
(1) $k_1 \sim k_2$, $l_1 \sim l_2$ ならば $k_1+l_1 \sim k_2+l_2$
(2) $k_1 \sim k_2$, $l_1 \sim l_2$ ならば $k_1 l_1 \sim k_2 l_2$

・同値関係による組分け
集合 X に同値関係を1つ与えることと，X を"もれなく重複なく"組分けすることは同じことである．

X 上にある同値関係が与えられたとする．

$E \subseteq X$ が $\sim$ に関する<u>同値類</u>（equivalence class）

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $a \in E$ に対し，a と同値な要素は E に属し，E に属する要素は a と同値である．

$a \in X$ に対し
$$[a] := \{ b \in X \mid b \sim a \}$$
とおくと $[a]$ は1つの同値類，a をこの同値類の代表元（representative）とよぶ