幾何学1　担当 石川剛郎　第2回 (2-1)

論理

数学は真偽(しんぎ)に関する学問である. 真偽に関する洗練された学問である. 数学は命題の真偽を調べる学問である.

命題とは真(T)か偽(F)がはっきり決っているあるいは, はっきり決めることが可能である陳述や主張のことである.

例 (命題の例) 次はすべて命題である:

(1) $1+1=2$　T

(2) $a^2=-1$ となる実数 a は存在しない.　T

(3) $1+1=3$　F

論理記号

ならば($\Rightarrow$)　必要十分である(同値である $\Leftrightarrow$)

かつ($\wedge$), または($\vee$)　任意の(すべての $\forall$)

ある(存在する, $\exists$), でない(否定 $\neg P$, $\bar{P}$)

$P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$,

$\forall x\, P(x)$, $\exists x\, Q(x)$, $\neg P$

(論理記号は必要な場合にのみ使い, なるべく普通の言語で表現する)

$P \Rightarrow Q$ の真偽　Pが真のときにQが真であればよい

Pが真であるにもかかわらずQが偽のときは「$P \Rightarrow Q$」は偽だが, それ以外は真.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

$P \Rightarrow Q$ が真であることを示すには,
Pが真のときに Qが真であること,
そのことだけを示せばよい
(「真である」=「成り立つ」, 「示す」=「論証する」)

例 ($P \Rightarrow Q$の真偽の例示)

$P(x)$: $x \geqq 1$ ならば $x^2 \geqq 1$

とおくと, $P(x)$は任意の実数xについて真である.
とくに $x=-1$ とすると
$P(-1)$: $-1 \geqq 1$ ならば $1 \geqq 1$ は真.
$x=0$ とおくと
$P(0)$: $0 \geqq 1$ ならば $0 \geqq 1$ も真.

- $P \Rightarrow Q$の<u>対偶</u>(contraposition) $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
- $P \Rightarrow Q$の逆 $\neg(P \Rightarrow Q)$ の真偽は次の通り

P	Q	$(\neg P) \vee Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q)$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	F	F	T
F	F	F	F	T	F	T

よって$\{(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)\} \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee Q$, $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge (\neg Q)$
が成立.

$\forall x\ P(x)$, $\exists x\ Q(x)$ の否定

$\forall x\ P(x)$ が真ということは、任意の x について $P(x)$ が成り立つことだから、それを否定すると、ある x について $P(x)$ が成り立たない、ということになる

$$\neg(\forall x\ P(x)) \iff \exists x\ (\neg P(x))$$

同様に

$$\neg(\exists x\ Q(x)) \iff \forall x\ (\neg Q(x))$$ が成り立つ。

例題 $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ の否定を書け

解答例 $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ の否定は

$$\exists x, \neg(P(x) \Rightarrow Q(x))$$

ここで $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ の否定は $P(x) \land (\neg Q(x))$

だから

$$\exists x\ (P(x) \land (\neg Q(x)))$$ …答

演習 $\exists x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ の否定を書け。

かつ，または の否定

（P かつ Q）でない $\iff$（P でない）または（Q でない）

（P または Q）でない $\iff$（P でない）かつ（Q でない）

"双対性（そうついせい）"

◎ 集合

何らかの基準で集まっている"団体"を集合(set)とよぶ
集合のメンバーを要素あるいは元(element)とよぶ.
集合は $A, B, \cdots, X, Y, \cdots$ など大文字を使って表す場合が多い.
x が集合 X の要素のとき, $x \in X$ あるいは $X \ni x$ と書き,
x は X に<u>属する</u>という.
x が X に属さないとき $x \notin X$ あるいは $X \not\ni x$ と書く.

集合の相等
$X = Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \, (x \in X \Leftrightarrow x \in Y)$ が成り立つ.

集合の表示法
- 条件(基準)で記述
  $X = \{x \mid P(x)\}$ $P(x)$ が成り立つ x の全体
  $A = \{x \in X \mid Q(x)\} = \{x \mid x \in X$ かつ $Q(x)\}$
- 列挙
  $\{0, \pm 2, \pm 4, \cdots\} = 2\mathbb{Z}$ 偶数全体

例(集合の例)
自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
(この授業では0も自然数に含める)
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \cdots$
例(空集合)
$\emptyset$: 要素がまったくない集合 $\forall x \, (x \notin \emptyset)$ が真

与えられた集合 X の一部分(全体でも空集合でもよい)を
X の<u>部分集合</u>(subset)という.
$A \subseteq X \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x \in A \Rightarrow x \in X)$ が成り立つ
($A \subset X$, $X \supseteq A$, $X \supset A$ などとも書く)

包含関係

$A \subseteq X$　A は X に含まれる（あるいは包まれる）
　X は A を含む（あるいは包む）　とも言う.

$X = Y \iff (X \subseteq Y$ かつ $X \supseteq Y)$ が成立.

$A \not\subseteq X \overset{\text{def}}{\iff} \exists a\,(a \in A$ かつ $a \notin X)$, $A \subseteq X$ の否定

$A \subsetneq X \overset{\text{def}}{\iff} A \subseteq X$ かつ $A \neq X$　真部分集合.

$\iff (a \in A \Rightarrow a \in X)$ かつ $\exists x\,(x \in X$ かつ $x \notin A)$

$A \cap B := \{x \mid x \in A$ かつ $x \in B\}$
共通部分 (intersection)

$A \cup B := \{x \mid x \in A$ または $x \in B\}$
和集合 (union)

$A \setminus B := \{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$
（$= A - B$ と書くこともある）　差集合 (differense set)

例 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$：無理数全体の集合.

集合 X の部分集合を扱っている際に（$A \subseteq X$ に対し）

固定

$A^c := \{x \in X \mid x \notin A\} = X \setminus A$
補集合 (complement)

集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} = (A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = (A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

λ は添字（そえじ）（ラベル）, Λ は添字集合（ラベル集合 index set, label set）

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x \mid \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対し } x \in A_\lambda\}$$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x \mid \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ に対し } x \in A_\lambda\}$$

例題 $A \subseteq X,\ B \subseteq X$ に対し

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を示せ

解答例 $x \in X$ について,

$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \in A$ かつ $x \in B)$ でない

$\Leftrightarrow x \notin A$ または $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c$ または $x \in B^c$

$\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$

よって $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ //

($(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ と $(A \cap B)^c \supseteq A^c \cup B^c$ を示しても良い)

演習 (例題と同様にして) $A \subseteq X,\ B \subseteq X$ に対し

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を示せ

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c,\quad \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$ も成立.

<u>直積</u> A, B 集合に対し

順序対 (じゅんじょつい) ordered pair

$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ 直積集合 (direct product)

$A \subseteq X,\ B \subseteq Y$ のとき $A \times B \subseteq X \times Y$

・一般には $A \times B \neq B \times A$

集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対し

$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid$ 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $a_\lambda \in A_\lambda\}$

ベクトルのようなもの

($\underset{\text{i.e.}}{=} \{f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \mid \forall \lambda \in \Lambda,\ f(\lambda) \in A_\lambda\}$

写像 (次回確認)　a_λ に該当

おしまい