基礎数学B　担当 石川剛郎　第12回

(12-1)

⑪ 距離空間から距離空間への写像の連続性

(X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする．（距離関数の違いを区別するため d_X, d_Y と記している）．

$f: X \to Y$ を X から Y への写像，$a \in X$ とする．

<u>定義1.</u> f が <u>点 a で連続</u>　d_Xに関して

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X 上の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 a に収束するならば

Y 上の点列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $f(a)$ に収束する．　d_Yに関して

$\overset{\text{言いかえ}}{\Longleftrightarrow}$ X 上の任意の点列 $\{x_n\}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} d_X(a, x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_Y(f(a), f(x_n)) = 0.$$

例（講義ノート 8-5）$A \subseteq \mathbb{R}^n$　$f: A \to \mathbb{R}^m$，$a \in A$

$\mathbb{R}^n$ 上のユークリッド距離 $d = d_{\mathbb{R}^n}$ を A 上に制限した距離（8-4）を d_A としたとき，

f が（講義ノート 8-5 の意味で）a で連続

$\Leftrightarrow$ f が d_A と $d_{\mathbb{R}^m}$ に関して a で連続

演習．上の $\Leftrightarrow$ を確認せよ．

定理. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f: X \to Y$ を写像, $a \in X$ とする. このとき 次の5条件は互いに同値である:

(1) f が a で連続 ← 12-1 の定義!

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して,
$x \in X$, $d_X(a, x) < \delta$ ならば $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$

(2)' 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して
$$f(B_{d_X}(a, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(a), \varepsilon).$$

(3) Y における $f(a)$ の任意の近傍 M に対して, X における a の近傍 N が存在して $f(N) \subseteq M$

(3)' Y における $f(a)$ の任意の開近傍 U に対して, X における a の開近傍 V が存在して $f(V) \subseteq U$

証明 (8-1 の定理の証明と同じ発想で証明できるが, 念のため 証明の概略を書いておく.)

(1)⇒(2). (1)を仮定し, (2)を否定する. 「$\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists x \in X$ $d_X(a, x) < \delta$ かつ $d_Y(f(a), f(x)) \geqq \varepsilon$」が成立
この $\varepsilon > 0$ に対し $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ について $x_n \in X$
$d_X(a, x_n) < \frac{1}{n}$, $d_Y(f(a), f(x_n)) \geqq \varepsilon$ ととり, X 上の点列 $\{x_n\}$ を作る. $\{x_n\}$ は a に収束するが, $\{f(x_n)\}$ は $f(a)$ に収束しない.
(1) に矛盾, よって (1)⇒(2) が成立.

(2)⇒(2)' は書き換えただけなので成立

(2)'⇒(3). (2)' を仮定する. $f(a)$ の任意の近傍 M をとる.
($f(a)$ は M の内点だから) $\exists \varepsilon > 0$, $B_{d_Y}(f(a), \varepsilon) \subseteq M$ となる.
(2)' より $\exists \delta > 0$, $f(B_{d_X}(a, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)$.

$N = B_{d_X}(a, \delta)$ とおくと, N は a の近傍で
$f(N) \subseteq M$. よって (3) が成立. よって $(2)' \Rightarrow (3)$ が成立

$(3) \Rightarrow (3)'$. (3) を仮定し, $f(a)$ の任意の開近傍 U をとる.
(U は $f(a)$ の近傍だから), (3) より X における a の近傍 N が存在して
$f(N) \subseteq U$ となる. N は a の近傍だから X の開集合 V で
$a \in V \subseteq N$ となるものが存在する. V は a の近傍で
$f(V) \subseteq U$ となる. よって $(3)'$ が成立. よって $(3) \Rightarrow (3)'$ が成立.

$(3)' \Rightarrow (1)$. $(3)'$ を仮定し, a に収束する X 上の点列 $\{x_n\}$ を
任意にとる. ($\{f(x_n)\}$ が $f(a)$ に収束することを示す)
任意に $\varepsilon > 0$ をとる. $U = B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)$ とおく.
U は $f(a)$ の開近傍だから, $(3)'$ より a の開近傍 V があって
$f(V) \subseteq U$ となる. V は a の開近傍だから $\exists \delta > 0$,
$B_{d_X}(a, \delta) \subseteq V$ となる. $\{x_n\}$ が a に収束するから, その $\delta > 0$
に対し 番号 N が存在して $N \leqq n$ ならば $d_X(a, x_n) < \delta$
つまり $x_n \in B_{d_X}(a, \delta)$. よって $x_n \in V$, よって $f(x_n) \in U$
よって $d_Y(f(a), f(x_n)) < \varepsilon$. よって $\{f(x_n)\}$ は $f(a)$ に収束する.
したがって (1) が成立. よって $(3)' \Rightarrow (1)$ が成立. //

定義 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f: X \to Y$ を
写像とする.
写像 f が連続写像 $\overset{\text{def (i)}}{\Longleftrightarrow}$ f が任意の点 $a \in X$ で連続 (12-1)

$\Leftrightarrow$ (ii) $\forall a \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, $x \in X, d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow$ (ii)' $\forall a \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $f(B_{d_X}(a, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)$.

$\Leftrightarrow$ (iii) $\forall a \in X$, Y における $f(a)$ の任意の近傍 M に対し, X における a の近傍 N
が存在して $f(N) \subseteq M$)

$\Leftrightarrow$ (iii)' $\forall a \in X$, Y における $f(a)$ の任意の開近傍 U に対し, X における a の
開近傍 V が存在して $f(V) \subseteq U$)

(12-2) の定理から

定理（連続性の逆像を使った特徴付け）
(X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間，$f: X \to Y$ を写像とする。
このとき 次の3条件は お互いに同値である。

(i) fは連続写像である。　（12-3）

(iv) d_Yに関するYの任意の開集合Uに対して
$f^{-1}(U)$が d_Xに関するXの 開集合となる。
（9-5 参照）

(iv)′ d_Yに関するYの任意の閉集合Fに対し，
$f^{-1}(F)$が d_X に関するXの閉集合となる。
（10-4 参照）

※ $f^{-1}(U)$は Uのfによる逆像（3-1 参照）
$f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}$

証明．(i) ⇒ (iv)．(i)を仮定し，Yの開集合Uを任意にとる。$f^{-1}(U)$がXの開集合であることを示す。
任意に $a \in f^{-1}(U)$ をとる．$f(a) \in U$である．UはYの開集合だから $\varepsilon > 0$ が存在して $B_{d_Y}(f(a), \varepsilon) \subseteq U$．
fは a で連続だから，このεに対し，$\delta > 0$ が存在して
$f(B_{d_X}(a, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(a), \varepsilon) \subseteq U$ となる．
このとき $B_{d_X}(a, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$ となる．
よって $f^{-1}(U)$ は Xの開集合である．よって(iv)が成立．
よって(i)⇒(iv) が成立．
(iv) ⇒ (iv)′ (iv)を仮定し，Yの 閉集合Fを任意にとる。
$Y \setminus F$ は Yの開集合だから $f^{-1}(Y \setminus F)$ はXの開集合
となる。（(iv)より）

($x \in X$ について,
$x \notin f^{-1}(Y \setminus F) \Leftrightarrow f(x) \notin Y \setminus F \Leftrightarrow f(x) \in F \Leftrightarrow f^{-1}(F)$
だから) $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$ は X の閉集合.
よって (iv)$'$ が成立, よって (iv) $\Rightarrow$ (iv)$'$ が成立.
(iv)$' \Rightarrow$ (i), (iv)$'$ を仮定し, $a \in X$ とする. (f が a で連続であることを示す.) 任意に $\varepsilon > 0$ をとり, $U := B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)$ を考える. U は Y の開集合だから $F = Y \setminus U$ は Y の閉集合,
(iv)$'$ より $f^{-1}(F)$ は X の閉集合, $f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus U)$
$= X \setminus f^{-1}(F)$ は X の開集合である. また $f(a) \in U$ だから
$a \in f^{-1}(U)$ である. よって $\delta > 0$ が存在して $B_{d_X}(a, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$
よって $f(B_{d_X}(a, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(a), \varepsilon)$ となる.
よって f は a で連続である. $a \in X$ は任意だから
f は連続写像 つまり (i) が成立. よって (iv)$' \Rightarrow$ (i) が成立 //

定理. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f: X \to Y$ を連続写像
$A \subseteq X$ とする. このとき 次がそれぞれ成り立つ

(1) A が X の点列コンパクト集合ならば
$f(A)$ は Y の点列コンパクト集合である.

(2) A が X のコンパクト集合ならば
$f(A)$ は Y のコンパクト集合である.

証明. (講義ノート ページ 11-6 11-7 の議論も参照)

(1) A を点列コンパクトとし, $f(A)$ 上の任意の点列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとる. ($\{y_n\}$ のある部分列が $f(A)$ の点に収束することを示す)
$y_n \in f(A)$ だから $y_n = f(x_n)$ となる $x_n \in A$ がとれる.

A上の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ができる．Aは点列コンパクトだから $\{x_n\}$の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ があって，Aの点に収束する．極限点を a とする．$\lim_{k\to\infty} d_X(a, x_{n_k}) = 0$ であり fは aで連続だから，

$$\lim_{k\to\infty} d_Y(f(a), f(x_{n_k})) = 0$$

である．$y_{n_k} = f(x_{n_k})$ であり $a\in A$ より $f(a)\in f(A)$ である．よって $\{y_n\}$ の部分列 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $f(A)$の点に収束する．したがって $f(A)$は点列コンパクト集合である．

(2) Aをコンパクト集合とする．$f(A)$ の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ $f(A)\subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ をとる．(有限部分被覆で $f(A)$がおおえることを示す．)

$x\in A$ を任意にとる．$f(x)\in f(A)\subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ である．よって $\lambda\in\Lambda$ があって $f(x)\in U_\lambda$ である．$x\in f^{-1}(U_\lambda)$ である．よって $A\subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$ である．U_λ はYの開集合だから $f^{-1}(U_\lambda)$ はXの開集合である (12-4)．よって $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は Aの開被覆である．Aはコンパクト集合だから有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \Lambda$ があって $A\subseteq f^{-1}(U_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{\lambda_r})$ となる．

($x\in A$ とすると ある i, $1\leq i\leq r$ について $f(x)\in U_{\lambda_i}$ だから)

$f(A)\subseteq U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_r}$ である．

よって $f(A)$ はコンパクト集合である． //

※ 距離空間の部分集合については

点列コンパクト $\Leftrightarrow$ コンパクト

が成立することが知られている．