幾何学I 担当石川剛郎 第1回

(11-1)

(11) 距離空間の点列コンパクト集合

定義 (X,d)を距離空間, $A\subseteq X$ とする
Aが点列コンパクト集合
$\overset{\text{def}}{\iff}$ A上の任意の点列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の適切な部分列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$が$A$の点に収束する。

定義 距離空間(X,d)が点列コンパクト空間
$\overset{\text{def}}{\iff}$ X自体が点列コンパクト
$\iff$ X上の任意の点列$\{x_n\}$の適切な部分列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$が($X$の点に)収束する

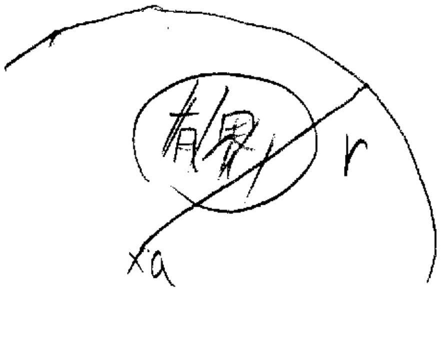
例 ユークリッド空間$(\mathbb{R}^n,d)$ (dはユークリッド距離)の部分集合Aが点列コンパクト $\iff$ Aが有界閉集合
(講義ノート6-3の定理)

関連して注目

とくに $\mathbb{R}^n$は$(\mathbb{R}^n,d)$の点列コンパクト集合でない
($\because$ 有界閉集合でないから)。$(\mathbb{R}^n,d)$は点列コンパクト空間でない。
$A\subseteq\mathbb{R}^n$を有界閉集合とすると、(A,d_A) (d_Aはユークリッド距離をA上に制限した距離)は点列コンパクト空間である。

定義 (有界集合) (X,d)を距離空間, $A\subseteq X$とする
Aが有界集合 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall a\in X$, $\exists r>0$, $A\subseteq B(a,r)$

$B(a,r)=\{x\in X \mid d(a,x)<r\}$



(11-2)

※一般の距離空間では有界閉集合でも点列コンパクトとは限らない

点列コンパクト $\not\Leftarrow$ 有界閉集合

例 Xを無限集合(であれば何でもよい), $d : X \times X \to \mathbb{R}$を

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

と定めると(X,d)は距離空間となる.

Xは有界閉集合 (∵ XはXの閉集合, $X = B_d(x,2)$ $(x \in X)$)
Xは点列コンパクトでない (∵ X上に点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$で $n \neq m$ なら $x_n \neq x_m$ となるものがとれる. $\{x_n\}$のどんな部分列も収束しない) $\to d(x_n, x_m) = 1$

定理. (X,d)を距離空間, $A \subseteq X$
このとき
Aが点列コンパクト $\Rightarrow$ Aが有界閉集合

証明 Aが点列コンパクトとする. まずAが有界であることを示す. もしAが有界でないとする. $\exists a \in X$があって $n = 1, 2, 3 \cdots$ に対して $A \not\subseteq B_d(a,n)$, $a_n \in A \setminus B_d(a,n)$ととると, A上の点列$\{a_n\}$のどんな部分列も収束しない.
(∵ 部分列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$がある点$b \in A$に収束するとすると
$n_k \leqq d(a, a_{n_k}) \leqq d(a,b) + d(b, a_{n_k}) \to d(a,b)$ $(k \to \infty)$
∞ で矛盾)
次にAが閉集合であることを示す. Aが閉集合でないとすると $\overline{A} \setminus A \neq \phi$ だから $a \in \overline{A} \setminus A$ がとれる. $a \in \overline{A}$ だから $n = 1, 2, \cdots$ に対し $B_d(a, \frac{1}{n}) \cap A \neq \phi$. $a_n \in B_d(a, \frac{1}{n}) \cap A$ とり Aの点列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$を作る. $0 \leqq d(a, a_n) < \frac{1}{n}$ だから $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. $\{a_n\}$のどんな部分列もaに収束するが $a \notin A$
$\{a_n\}$の任意の部分列がAの点に収束しない. 矛盾. よってAは閉集合 //

注. Xがユークリッド空間のときは, $\mathbb{R}$の性質を使って ⇐ を示すことができた
(6-4)

◎ 距離空間の部分集合のコンパクト性

(X, d)を距離空間, $A \subseteq X$とする

定義(開被覆) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$を($d$に関する)$X$の開集合の族とする.

$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が Aの開被覆

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

(つまり $\forall a \in A, \exists \lambda \in \Lambda, a \in U_\lambda$)

定義(コンパクト集合) (X, d)を距離空間, $A \subseteq X$とする.

AがXのコンパクト集合

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Aの任意の開被覆$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$に対し, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \Lambda$ (有限個)

が存在して $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U_{\lambda_i} \quad (= U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2} \cup \cdots U_{\lambda_r})$

注: コンパクトということは任意の開被覆をとったとき, すでに有限個の部分で覆われている, ということ

定義(コンパクト距離空間)

距離空間(X, d)がコンパクト(compact)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ X上のXの任意の開被覆$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

に対して, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \Lambda$

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} U_{\lambda_i}$$

↑

($\supseteq$は当り前)

例 (X, d) を距離空間, $A \subseteq X$ とする. A が有限集合ならば A は点列コンパクトであり, コンパクトである. (6-1 を参照)

定理 (X, d) を距離空間, $A \subseteq X$ とする.

A がコンパクト集合 $\Rightarrow$ A が有界閉集合

証明 A がコンパクトとする. まず A が有界であることを示す. A が有界でないとして矛盾を導く. A が有界でないと仮定する. $\exists a \in X$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し $A \not\subseteq B_d(a, n)$ である. $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_d(a, n)$, $B_d(a, n)$ は X の開集合だから $\{B_d(a, n)\}_{n=1}^{\infty}$ は A の開被覆だが有限部分被覆をもたない. 矛盾. よって A は有界である.

次に A が閉集合であることを示す. A が閉集合でないとする. $\overline{A} \setminus A \neq \emptyset$ である. $a \in \overline{A} \setminus A$ をとる.

$$U_n = \{x \in X \mid d(a, x) > \frac{1}{n}\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

は U_n は X の開集合. $A \subseteq \bigcup^{\infty} U_n \ (= X \setminus \{a\})$ なので $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ は A の開被覆であるが, 有限部分被覆は存在しない. (もし $\exists n$, $A \subseteq U_n$ ならば $A \cap B_d(a, \frac{1}{n}) = \emptyset$ となり $a \in \overline{A}$ に反する) よって矛盾. したがって A は閉集合 //

⑪ 距離空間上の連続関数

定義.(距離空間上の関数の連続性)
(X, d) を距離空間, $f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X$ とする.
f が点 a で連続

$\overset{\text{def}}{\iff}$ a に収束する X 上の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し
実数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(a)$ に収束する

$\overset{\text{言い換え}}{\iff}$ X 上の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し
$\lim_{n\to\infty} d(a, x_n) = 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(a)| = 0$
$\left(\lim_{n\to\infty} d(f(a), f(x_n)) = 0\right)$

"近づく点の値が近づく"

定理 (X, d) を距離空間, $f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X$ とする
次の4条件は互いに同値である.
(1) f が a で連続.
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して
$x \in X$, $d(a, x) < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して a の近傍 N が存在して (9-6)
$x \in N$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
(4) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, a の開近傍 U が存在して
$x \in U$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

証明. (1)$\iff$(2)$\iff$(3) は講義ノートページ 8-1 の証明とほぼ同一なので証明を略する. ここでは (3)$\iff$(4) を示す.
(3)$\Rightarrow$(4)　$U = N^{\circ}$ (Nの内部) とすると U は a の開近傍となり, 結論も成立する.
(4)$\Rightarrow$(3) は $N = U$ とすればよい　//

定義.(連続関数) (X,d) 距離空間, $f:X\to\mathbb{R}$ を関数とする.
fが連続 $\overset{def}{\iff}$ 任意の点$a\in X$でfが連続

例題 (X,d)が距離空間, $f:X\to\mathbb{R}$が連続写像とする. このとき任意の開集合 $U\subseteq\mathbb{R}$ に対し $f^{-1}(U)$ が X の開集合となることを示せ.

$\mathbb{R}$での $f(a)$のε近傍

解答例. 任意に $a\in f^{-1}(U)$ をとる. $f(a)\in U$である.
Uは$\mathbb{R}$の開集合だから, $\varepsilon>0$ があって $B(f(a),\varepsilon)\subseteq U$ となる. つまり $|y-f(a)|<\varepsilon$ ならば $y\in U$ となる.
fは点aで連続だから, (上の$\varepsilon>0$に対し) $\delta>0$があって $x\in B(a,\delta)$ ならば $|f(a)-f(x)|<\varepsilon$ となる.
よって $f(B(a,\delta))\subseteq B(f(a),\varepsilon)\subseteq U$ となる.
したがって $B(a,\delta)\subseteq f^{-1}(U)$ となる. よって $f^{-1}(U)$はXの開集合である. //

---

⑩ 最大値・最小値定理

定理. (X,d) を点列コンパクト(またはコンパクト)な距離空間とする. このとき任意の連続関数 $f:X\to\mathbb{R}$ には最大値と最小値が存在する.

証明. (X,d)が点列コンパクトとする. このとき$f(X)\subseteq\mathbb{R}$が点列コンパクトであることを示す. $f(X)$上の数列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$を任意にとる. $y_n\in f(X)$ だから $x_n\in X$で $y_n=f(x_n)$ となるものがある. (X,d)が点列コンパクトだからX上の点列$\{x_n\}$の部分列$\{x_{n_k}\}$でXの点に収束するものがある. $a=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$ とする.

fは点aで連続だから$\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$は$f(a)$に収束する
$y_{n_k}=f(x_{n_k})$だから$\{y_n\}$の部分列$\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$が$f(a)$に収束する。よって$f(A)$は$\mathbb{R}$の点列コンパクト集合である。
したがって$f(A)$は$\mathbb{R}$の有界閉集合である。よって
$f(A)$には最大値，最小値が存在する。

次に(X,d)がコンパクトであるとする。このとき
$f(X)\subseteq\mathbb{R}$がコンパクト集合であることを示す。
そのために$f(X)$の任意の開被覆$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$をとる。
(各U_λは$\mathbb{R}$の開集合で　$f(X)\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$である。)
fは連続だから$f^{-1}(U_\lambda)$はXの開集合である。
また　$X\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(U_\lambda)$である。
(∵ $x\in X$とすると　$f(x)\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$だから$\exists\lambda\in\Lambda, f(x)\in U_\lambda$
よって$x\in f^{-1}(U_\lambda)$)
$\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$は$X$の開被覆であり，$X$がコンパクトだから$\exists\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r\in\Lambda$があって

$$X\subseteq f^{-1}(U_{\lambda_1})\cup f^{-1}(U_{\lambda_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{\lambda_r})$$

となる。すると

$$f(X)\subseteq U_{\lambda_1}\cup U_{\lambda_2}\cup\cdots\cup U_{\lambda_r}$$

が成り立つ。
したがって$f(X)$は$\mathbb{R}$のコンパクト集合である。よって
$f(X)$は$\mathbb{R}$の有界閉集合である。よって$f(A)$には
最大値と最小値が存在する　//

※ 講義ノート 8-4 と比べてみるとよい。