

⑩ 距離空間の部分集合の内点・外点・境界点

定義. (X, d) を距離空間, $A \subseteq X$, $x \in X$ とする.(1) x が A の内点 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \delta > 0 \ B_d(x, \delta) \subseteq A$ (2) x が A の外点 $\stackrel{\text{def}}{\iff} x$ が $X \setminus A$ の内点.

$$\stackrel{\text{i.e.}}{\iff} \exists \delta > 0, B_d(x, \delta) \cap A = \emptyset$$

(3) x が A の境界点 $\stackrel{\text{def}}{\iff} x$ が A の内点でも外点でもない

$$\stackrel{\text{判}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, (B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ かつ } B_d(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset)$$

 $\uparrow$ 外点でもなく $\uparrow$ 内点でもない(4) x が A の触点 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, B_d(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ (5) x が A の集積点 $\stackrel{\text{def}}{\iff} x$ が $A \setminus \{x\}$ の触点.

$$\stackrel{\text{判}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, B_d(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

(6) x が A の孤立点 $\stackrel{\text{def}}{\iff} x \in A$ かつ (x は A の集積点でない)

$$\stackrel{\text{判}}{\iff} \exists \delta > 0 \ B_d(x, \delta) \cap A = \{x\}$$

演習. (X, d) を距離空間, $A \subseteq X$, $x \in X$ とする.このとき「(i) x が A の触点 $\iff$ (ii) x が A の内点または境界点」
が成り立つことを示せ.

10-2

⑩ 距離空間の部分集合の内部・外部・境界

定義. (X, d) を距離空間, $A \subseteq X$ とする.

(1) (d に関する X における) A の内点全体の集合を A の内部とよび $\text{Int}(A)$ あるいは A° と表す.

(2) A の外点全体の集合を A の外部とよび $\text{Ext}(A)$, A^c , $(A^\circ)^\circ$ と表す.

(3) A の境界点全体の集合を A の境界とよび, $\partial(A)$, $\text{Bdr}(A)$, A^b と表す.

X は $\text{Int}(A)$, $\text{Ext}(A)$, $\partial(A)$ という互いに共通部分が空である3つの部分集合の和集合となる.

(4) A の触点全体の集合を A の閉包とよび $\bar{A}$, $\text{Cl}(A)$ と表す.

$$\bar{A} = \text{Int}(A) \cup \partial(A) = A^\circ \cup \partial(A)$$

注) $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A} \subseteq X$,

$\text{Ext}(A) = X \setminus \bar{A}$, $\partial(A) = \bar{A} \setminus \text{Int}(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$ が成立.

定理. (X, d) を距離空間, $A \subseteq X$ とする. このとき次が成立.

(i) A° は d に関する X の開集合 (dに関する)

(ii) A° は A に含まれる最大の X の開集合

(iii) A が d に関する X の開集合 $\Leftrightarrow A^\circ = A$

(dに関する内部)

系. A が d に関する X の開集合 $\Leftrightarrow A$ の任意の境界点が A に属さない.

(10-3)

③ 距離空間における開集合系が満たす条件、

命題 (X, d) を距離空間とする、 d に関する X の開集合系について次が成り立つ

(1) X は X の開集合、 $\emptyset$ は X の開集合

(2) $U_1, U_2, \dots, U_r$ が X の開集合の (有限個の) 族
ならば 共通部分

$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_r$ は X の開集合.

(3) U_λ ($\lambda \in \Lambda$) が X の開集合の (無限でもよい) 族
ならば 和集合

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は X の開集合.

証明は (4-5) と同様なので省略、(使っているのは距離関数の性質 (← (9-D)) だけ.)

※ この開集合系が満たす条件をもとに「位相」が定義される、

10-4

⑩ 距離空間における閉集合

定理 (X, d) を距離空間 $A \subseteq X$ とする, このとき次の2条件は互いに同値である

- (1) $\bar{A} = A$ (つまり A の境界点はすべて A に属する)
- (2) $A^c = X \setminus A$ が X の開集合

定義 (X, d) を距離空間, $A \subseteq X$ とする
 A が d に関する X の閉集合

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \bar{A} = A$$

$\stackrel{\text{言い換え}}{\iff} X \setminus A$ が X の開集合

例 $\emptyset, X$ は X の開集合でもあり閉集合でもある.

例 $X = \{a, b\}$, $a \neq b$, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ $d(a, b) = 1$
 $d(a, a) = 0$, $d(b, b) = 0$

$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ はすべて X の開かつ閉集合

例 $X = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 上のユークリッド距離を X に制限して距離空間 (X, d) を考える.

$[0, \frac{1}{2})$ は X の開集合, $[0, \frac{1}{2}]$ は X の閉集合
($X = [0, 1]$ だけで考えていることに注意)

10-5

定理 (X, d) を距離空間, $A \subseteq X$ とする. このとき次が成り立つ

- (i) $\bar{A}$ は X の閉集合
- (ii) $\bar{A}$ は A を含む最小の X の閉集合
- (iii) A が X の閉集合 $\Leftrightarrow \bar{A} = A$

証明はユークリッドの場合 (5-7) と同様なので省略

定理 (距離空間の閉集合系の性質)

(X, d) を距離空間とする.

- (1) $\emptyset, X$ は X の閉集合
- (2) $F_1, F_2, \dots, F_r$ が X の閉集合の (有限個の) 族
ならば $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_r$ は X の閉集合
- (3) $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が X の閉集合の (無限でもよい) 族
ならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ は X の閉集合.

⑩ 距離空間の開集合の点列による特徴付け

例題 (X, d) を距離空間, $A \subseteq X$ とし, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を A 上の点列とする. $\{a_n\}$ が X の中で収束するとき, 極限 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は $\bar{A}$ に属することを示せ.
 $d(a, a_n) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$

解答例. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し番号 N があって $N \leq n$ ならば $d(a, a_n) < \varepsilon$ である. $a_n \in B(a, \varepsilon) \cap A$ だから $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ である. よって $a \in \bar{A}$ となる.

例題 (X, d) を距離空間, $A \subseteq X$ とする. このとき次の2条件が同値であることを示せ.

(1) A は (d に関する) X の閉集合

(2) A 上の任意の収束点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限が A に属する.

(1) を仮定する

d に関する

X における

解答例. (1) $\Rightarrow$ (2) A を X の閉集合とし, A 上の収束点列 $\{a_n\}$ を任意にとる. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は A に属する. A は X の閉集合だから $\bar{A} = A$. よって $a \in A$. よって (2) が成り立つ.

(2) $\Rightarrow$ (1) (2) を仮定する. $\bar{A} = A$ を示す. ($A \subseteq \bar{A}$ は自明なので $\bar{A} \subseteq A$ を示す.) 任意に $a \in \bar{A}$ をとる.

a は A の触点だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ である. 特に $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ に対し $B(a, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ である. $a_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap A$ ととり, $\{a_n\}$ は A 上の点列である.

$d(a, a_n) < \frac{1}{n}$ だから $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, a_n) = 0$.

よって $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ である. (2) より $a \in A$ である.

よって $\bar{A} \subseteq A$ である. (したがって $\bar{A} = A$.)

※ 講義ノートページ (6-1) と比べて証明を観賞するとよい.