担当 石川剛郎 (1-1)

幾何学１．ユークリッド空間と距離空間
第1回

平面上の点列の収束

平面上の点は，実数の組 (a, b) で表現される．平面上の点列は $(a_n, b_n), n = 1, 2, 3, \ldots,$ と表される．いま，点 $\mathrm{P}(a, b)$ と点列 $\mathrm{P}_n(a_n, b_n)$ があったとして，「番号 n を大きくしていったとき，P_n が P に近づいていく」という状況を考えよう．それを表すには，たとえば，次の２つの言い方が考えられる：

(I) n を大きくしていったとき，P_n と P の間の距離が 0 に収束する．

(II) n を大きくしていったとき，数列 $\{a_n\}$ が a に収束し，かつ，$\{b_n\}$ が b に収束する．

どちらが適切な表現だろうか？

実は，(I) と (II) は同じことを表している．このとき，点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ が点 P に**収束する**と言い，点 P を点列 $\{\mathrm{P}_n\}$ の**極限**とよぶ．だから，(I) と (II) は同じ意味を持つので，どちらも適切である．

「同じこと」を数学の専門用語で「同値である」あるいは「必要十分条件である」と表現する．

２つの条件（主張あるいは陳述）(I) と (II) が同値であるとは，ていねいに書くと，

「(I) が成り立つと仮定すると (II) が成り立ち，また，(II) が成り立つと仮定すると (I) が成り立つ」

ということである．

実際に (I) が成り立つのか，成り立たないのかは状況による．(II) が成り立つのか，成り立たないのかも状況による．即断してはいけない．数学は飛び

1-2

抜けて抽象的な学問なので，現実を超えて，あらゆる可能性を考えているのである．だから「仮定」するのである．仮定して，その結果，論理的に何が導かれるかを推論するのである．したがって，数学には汎用性があり，したがって，使い方次第で，数学は飛び抜けて応用範囲が広い学問にもなるのである．

さて,「(I) と (II) が同値」ということを，論理的に言い換えると，

「(I) ならば (II) 」かつ「(II) ならば (I)」

が真ということである．

以上を踏まえて,「(I) と (II) が同値」であることを証明しよう．

(I) と (II) が同値であることの証明．

ステップ1．まず「(I) ならば (II)」を示す．

(I) を仮定する．すなわち,「n を大きくしていったとき，P_n と P の間の距離が 0 に収束する」という，点列 P_n に関する条件（性質，状況）を仮定する．上にも述べたように，その際，仮定したことが本当にそうなのか，実はそうでないのか，ということは，とりあえず詮索しない．あらゆる状況に対応できるように，あくまで「仮定」として設定するのが数学の精神なのである．

P_n と P の間の距離は，三平方の定理（ピタゴラスの定理）によって，

$$\overline{\mathrm{P}\,\mathrm{P}_n} = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2},$$

だから，1つの数列 $\{\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2}\}$ について，

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

ということを仮定している．さて，(I) を仮定すれば，(II) が成り立つ，ということを示すことが当座の目標であった．そこで，(I) の仮定のもとで，n を大きくしていったとき，a_n が a に収束するかどうかをまず確かめる．「a_n が a に収束する」ということは,「$a_n - a$ が 0 に収束する」ということであ

1-3

る.「$a_n - a$ が 0 に収束する」ということは，絶対値を付けて,「$|a_n - a|$ が 0 に収束する」ということと同じ意味である.

いま，不等式

$$0 \leqq |a_n - a| = \sqrt{(a_n - a)^2} \leqq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = \overline{\mathrm{P}\,\mathrm{P}_n}$$

が成り立つから，(I) を仮定すると，n を大きくしていったとき，はさみうちされた $|a_n - a|$ は必然的に 0 に収束することになる．したがって，a_n は a に収束する.

次に，(I) の仮定のもとで，n を大きくしていったとき，b_n が b に収束するかどうかを確かめる，ということになるが，これは上と同様であって，不等式

$$0 \leqq |b_n - b| = \sqrt{(b_n - b)^2} \leqq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = \overline{\mathrm{P}\,\mathrm{P}_n}$$

から，(I) を仮定すると，n を大きくしていったとき，$|b_n - b|$ が 0 に収束することがわかり，b_n が b に収束することも導かれる.

したがって，(I) を仮定すると,「n を大きくしていったとき，a_n が a に収束し，かつ，b_n が b に収束する」こと，つまり，(II) が成り立つことがわかった.

よって,「(I) ならば (II) 」は真である.

ステップ2．次に 「(II) ならば (I)」を示す.

(II) を仮定する．すなわち,「n を大きくしていったとき，a_n が a に収束し，かつ，b_n が b に収束する」という，点列 P_n に関する条件（性質，状況）を仮定する．その仮定のもとで，(I) を示そう.

繰り返し強調したいのは，その際，本当にそうなのか，実はそうでないのか，は詮索しない．あらゆる状況に対応できるように，あくまで「仮定」として設定しているわけである．それが数学の精神である.

さて，(II) を仮定して (I) を示すために，n を大きくしていったとき，P_n と P の距離が 0 に収束するかどうかを調べる．いま，三角不等式から,

$$0 \leqq \overline{\mathrm{P}\,\mathrm{P}_n} \leqq |a_n - a| + |b_n - b|$$

1-4

がわかるから，

$$|a_n - a| \to 0, \text{かつ}, |b_n - b| \to 0 \ (n \to \infty)$$

という仮定 (II) から，

$$\overline{\mathrm{P}\,\mathrm{P}_n} \to 0 \ (n \to \infty)$$

という (I) の主張が導かれる．したがって，「(II) ならば (I)」が真である．

以上により，(I) と (II) が同値であること，すなわち，同じ意味であることが示された． □

さらに，条件 (I), (II) と同じ条件として，次の条件 (III) が考えられる．

(III) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，番号 N が存在して，$N \leqq n$ ならば，$\overline{\mathrm{P}\,\mathrm{P}_n} < \varepsilon$.

正数 ε をいくら小さく設定しても，それに応じて番号 N を大きくとれば，それから先のすべての n については，$\overline{\mathrm{P}\,\mathrm{P}_n} < \varepsilon$ となる，というココロである．

$\{\overline{\mathrm{P}\,\mathrm{P}_n}\}$ は非負の実数からできる数列である．一般に，実数の数列 $\{c_n\}$ が 0 に収束するというのは，n を増加させたとき，c_n の大きさ（絶対値）が限りなく小さくなる，という意味である．すなわち，論理的に述べると，「任意の $\varepsilon > 0$ に対し，番号 N があって，$N \leqq n$ ならば，$|c_n| < \varepsilon$ となる」という意味である．

この授業で学んでいけば，条件 (III) も (I) や (II) と同じ条件であることが“すんなり”わかるようになる，そんなことを目標に，位相に関するあれこれを急がずに，じっくり説明していくことにする．

参考：数直線上の距離と位相

数直線 $\mathbf{R}$ の点 a と b の距離を $|b-a|$ で定める：

$$d(a,b) := |b-a|.$$

1-5

これが，１次元ユークリッド距離である．このとき，次が成り立つ．
距離の性質：
（対称性） 任意の $a, b \in \mathbf{R}$ について $d(a, b) = d(b, a)$ が成り立つ．
（正値性１） 任意の $a, b \in \mathbf{R}$ について $d(a, b) \geq 0$ である．
（正値性２） $d(a, b) = 0$ となるのは，$a = b$ のとき，そのときに限る，
（三角不等式） 任意の $a, b, c \in \mathbf{R}$ について，

$$d(a, c) \leqq d(a, b) + d(b, c)$$

が成り立つ．

ユークリッド距離 d が与えられた数直線，すなわち距離空間 $(\mathbf{R}, d)$ を１次元ユークリッド空間とよぶ．

$a \in \mathbf{R}$ とし，$\varepsilon > 0$ とする．距離 d に関する a の ε-近傍を

$$B(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbf{R} \mid d(a, x) < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

で定める．$U \subseteq \mathbf{R}$ が開集合とは，任意の $a \in U$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，$B(a, \delta) \subseteq U$ となるときに言う．$\mathbf{R}$ の開区間 (a, b) は開集合である．$\mathbf{R}$ の開集合は，開区間を合わせてできるような部分集合である．ちなみに，開区間 (a, b) は $B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$ とも表される．空集合も $\mathbf{R}$ 自体も $\mathbf{R}$ の開集合である．ユークリッド距離に関する $\mathbf{R}$ の開集合の全体の集合 $\mathcal{O}_{\mathbf{R}}$ を $\mathbf{R}$ 上の１次元ユークリッド位相と言う．

$\mathbf{R}$ の部分集合 A を与えると，$\mathbf{R}$ の点が３種類，A の内点，外点，境界点に分類される．$a \in \mathbf{R}$ が A の内点とは，$B(a, \delta) \subseteq A$ となる $\delta > 0$ が存在するとき，$c \in \mathbf{R}$ が A の外点とは，$B(c, \delta) \subseteq \mathbf{R} \setminus A$ となる $\delta > 0$ が存在するとき，そして，$b \in \mathbf{R}$ が A の境界点とは，どんな $\varepsilon > 0$ をとっても $B(b, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, B(b, \varepsilon) \cap (\mathbf{R} \setminus A) \neq \emptyset$ となるときである．

$\mathbf{R}$ の部分集合 F が閉集合とは，F のすべての境界点が F に属するときに言う．$\mathbf{R}$ の閉区間 $[a, b]$ は閉集合である．１点，有限個の点，空集合，$\mathbf{R}$ 自体は $\mathbf{R}$ の閉集合である．

半開区間 $[a, b)$ や $(a, b]$ は $\mathbf{R}$ の開集合でも閉集合でもない．

1-6

数列の極限

極限をイメージするには，まず，数直線の上を自由に動く点（物理で言うところの「質点」）を想像することから始めるとよい．数直線上を動く点は，ある位置にあれば，その瞬間にある位置の実数を表す．別の位置にあれば，その瞬間，別の実数を表す．

a を実数とする．このとき，矢印の記号を使って， $x \to a$ という記号で，x が動いていって，a を表す点にどんどん近づいていく状況をを表すことにする．簡単に「x が a に近づく」と読む．このとき，近づき方は問わない．x が左から a に近づいてもよいし，右から近づいてもよい．右に行ったり左に行ったりしながら近づいてもよい．近づく近づかない，ということを納得するのは容易なことではない．

数列 $\{a_n\}$ は，数直線上を動く点の各時刻での位置の記録と思える．時刻 0 のときの位置が a_0 で，時刻 1 のときの位置が a_1 で，時刻 2 のときの位置が a_2 で，時刻 3 のときの位置が a_3 である．過去のことはこの際，気にしない．落ち着きがない数列もあれば，早々とある値に近づいていくのが明らかに見てとれる場合もある．

実際問題として，最初の有限個のデータだけでは，その数列の極限値はわからない．わかるはずがない．法則性が必要である．法則性がないと，おおよそ推測はできたとしても，極限値を厳密に求めることはできない．

$a_n = 1/10^n$ のとき，$a_0 = 1, a_1 = 0.1, a_2 = 0.01, a_3 = 0.001$ となり，0 に近づいていく．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と表すことができる．

$b_n = 1 - 1/10^n$ とおけば，$\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ である．

$$0.99999\cdots\cdots = 1$$

である．$0.99999\cdots\cdots$ は，有限で切った数列

0, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, 0.999999, 0.9999999, 0.99999999, 0.999999999, 0.

が 1 にどんどん近づく．この極限の状況を表しているからだ．

1-7

実数は無限小数である．有限少数の後ろには 0 が無限に続いている．ただし見た目が異なる無限小数が同じ実数を表す場合があるから要注意である．

定義．（数列の収束）$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする．$a \in \mathbf{R}$ とする．実数列 $\{a_n\}$ が a に**収束する**とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 N が存在して，$N \leq n$ ならば，$|a_n - a| < \varepsilon$ となるときに言う．

このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

あるいは

$$a_n \to a (n \to \infty)$$

と表す．a を実数列 $\{a_n\}$ の**極限**と呼ぶ．

実数列 $\{a_n\}$ が**収束する**とは，ある実数に収束するときに言い，どの実数にも収束しないとき，$\{a_n\}$ は**発散する**と言う．

おしまい