ヤング図形に関連するマルコフ連鎖とそのスケーリング極限

筑波大学集中講義 2017.10.30–11.2

洞　彰人　（北大理）

レポート用問題

※提出期限は, 2017 年 11 月末日　　※提出場所は,

次の [I] と [II] に答えなさい. 記号や用語の意味については, 講義で与えたとおり.

[I] 月, 火, 水, 木のどれか 1 つの曜日の講義内容を簡潔に報告しなさい. その際, キーワードと思う語句数個に下線を引きなさい.

[II] 次の問の中から 1 題以上を選んで解答しなさい.

[問 1] $x_1 < y_1 < \cdots < y_{r-1} < x_r$ に対し,

$$\frac{(z-y_1)\cdots(z-y_{r-1})}{(z-x_1)\cdots(z-x_r)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mu_i}{z-x_i}$$

と部分分数に分解するとき, 次のことを示しなさい.

$$\mu_i > 0 \quad (\forall i \in \{1, \cdots, r\}), \qquad \sum_{i=1}^{r} \mu_i = 1$$

[問 2] 逆正弦則の Stieltjes 変換

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{z-x} \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}\, dx, \qquad z \in \mathbb{C}^+$$

を計算しなさい.

[問 3] Laurent 級数表示

$$\Sigma_k(\lambda) = -\frac{1}{k}\,[z^{-1}]\Big\{\frac{1}{G(z;\lambda)G(z-1;\lambda)\cdots G(z-k+1;\lambda)}\Big\}$$

の右辺を直接計算することにより, $\Sigma_2(\lambda)$ の値を λ の山谷座標で表しなさい.

[問 4] 有限群の正規化された既約指標が群環の中心上で乗法的であることを示しなさい.

[問 5] 極限形状 $\Omega(x)$ がみたす 2 階の常微分方程式を 1 つ与えなさい.

[問 6] 次式の左辺と右辺をそれぞれ λ の Frobenius 座標と山谷座標で表して両辺の log の $1/z$ 展開の係数を比べることにより, $M_4(\tau_\lambda) = 4p_3(\lambda) + p_1(\lambda)$ が成り立つことを示しなさい.

$$\frac{\Phi(z-\frac{1}{2};\lambda)}{\Phi(z+\frac{1}{2};\lambda)} = z\,G(z\,\lambda)$$

[問 7] 高々可算な集合に値をもつ連続時刻の Markov 連鎖の構成法について, 特に確率空間の明確な設定を意識して説明しなさい.