大阪大学大学院理学研究科　集中講義　　　　　　　　　　　　　2019(R1).5.27–31

対称群の表現に関連する確率モデル

洞　彰人 (北海道大・理)

レポート用問題

※提出期限・提出場所等は, 杉田先生の指示にしたがってください.

次の **[I]**, **[II]** に答えてください. 可能なら **[III]** からも任意題を選んで解答してください. 記号や用語の意味は, 講義で述べたとおりです.

[I] 講義予定にある §1〜§11 の中から 2 つの節を選び, 講義内容を簡潔に報告しなさい. キーワードだと思う語句数個に下線を引きなさい.

[II] 次の山谷座標で表されるヤング図形の箱数を答えなさい.

(1) $(-4,-3,-2,1,2,3,5)$　　　(2) $(-7,-6,-3,-1,1,4,5,6,7)$

[III] [問] $\omega \in \mathbb{D}$ に対し, $y=\omega(x)$ と $y=|x|$ とで囲まれる部分の面積が 2 であるという条件のもとで, 曲線 $\{(x,\omega(x))\,|\,x \in \operatorname{supp}\omega\}$ の長さが最小になるような ω を求めなさい.

[問] VKLS 極限形状 $\Omega(x)$ がみたす 2 階の常微分方程式を 1 つ求めなさい.

[問] $\tau_1, \tau_2, \cdots$ が指数分布にしたがう独立同分布の確率変数列であるとき, $s>0$ と $j \in \mathbb{N}$ に対し, 事象 $\{\tau_1+\cdots+\tau_j \leqq s < \tau_1+\cdots+\tau_{j+1}\}$ の確率を求めなさい.

[問] $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ が任意次数のモーメントをもち, ある $a>0$ があって任意の k 次モーメントの絶対値が a^k でおさえられるとき, μ がコンパクト台をもつことを示しなさい.

[問] 4 次対称群の指標表を求めなさい. 一番難しいと思う成分の計算の仕方を説明しなさい.

[問] 分割および非交差分割のなす半順序集合 $\mathrm{P}(4)$ および $\mathrm{NC}(4)$ のメビウス関数 $\mathrm{M}(\,\cdot\,, 1_4)$ をそれぞれ求めなさい.

[問] §7 に述べた制限誘導連鎖の推移確率行列 $P^{(4)}$ を対角化しなさい.

[問] §11 に述べた極限プロファイル $[\Omega]^{\sqrt{m/t}}(x)$ がみたす偏微分方程式を 1 つ求めなさい. ただし (§11 まで進まなかった場合のため),

$$[\Omega]^{\sqrt{m/t}}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\Big(x \arcsin\big(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{t}}x\big) + \sqrt{\frac{4t}{m}-x^2}\Big), & |x| \leqq 2\sqrt{\frac{t}{m}} \\ |x|, & |x| > 2\sqrt{\frac{t}{m}} \end{cases}$$

[問] §9 の定理 1 に述べた極限プロファイル $\omega_t(x)$ がみたす偏微分方程式を 1 つ求めなさい.

以上