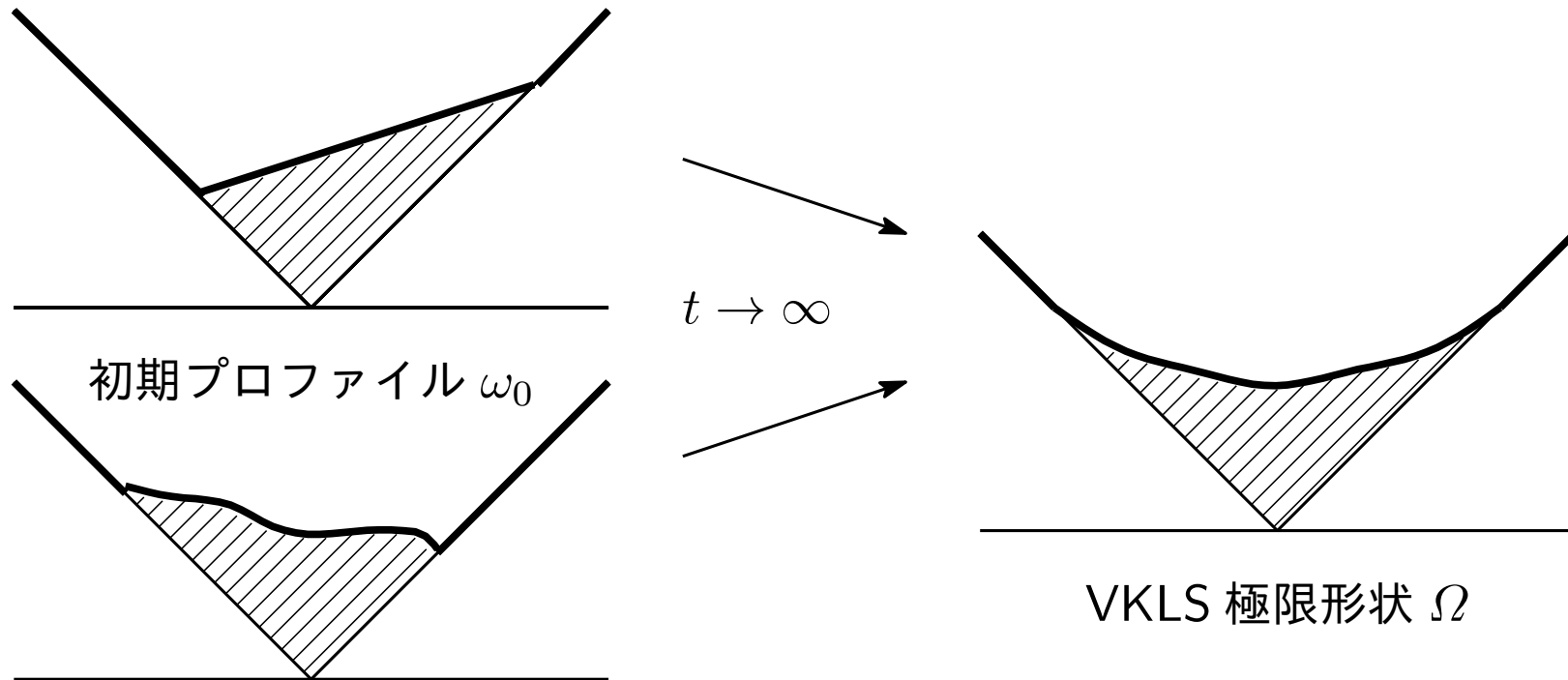


# 対称群の表現に関連する確率モデル

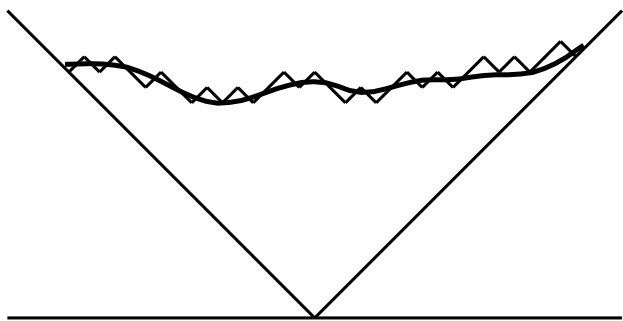
## — ヤング図形集団における巨視的プロファイルの時間発展 —

洞 彰人 (Akihito HORA) 北海道大学大学院理学研究院

大阪大学大学院理学研究科談話会 (兼 集中講義の概観) 2019 年 5 月 27 日



界面はランダムなギザギザの極限 ← Young 図形のスケール変換

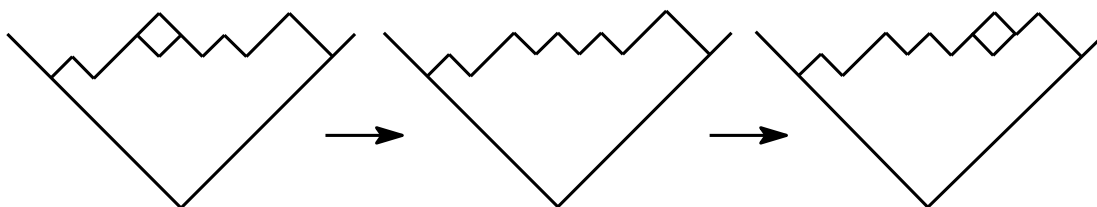


$$\int_{-\infty}^{\infty} (\omega(x) - |x|) dx = 2$$

$\omega$  を  $[\lambda]^{\sqrt{n}}$  ( $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ ) で近似

ランダムな力学の背後に対称群の表現の分岐則

$$\mathbb{Y}_n = \{ \text{箱数 } n \text{ の Young 図形} \} \cong \widehat{\mathfrak{S}}_n$$



$$\mathbb{Y}_n \rightarrow \mathbb{Y}_{n-1} \rightarrow \mathbb{Y}_n$$

$$\lambda \searrow \nu \nearrow \mu$$

対称群のサイズ  $\rightarrow \infty$  の漸近理論 — 自由確率論の現れ

確率論  $\iff$  ランダムウォーク — “枝わかれ”

- 枝わかれと合流の重なるの向こうにある景色
- 数学のいたるところにある題材

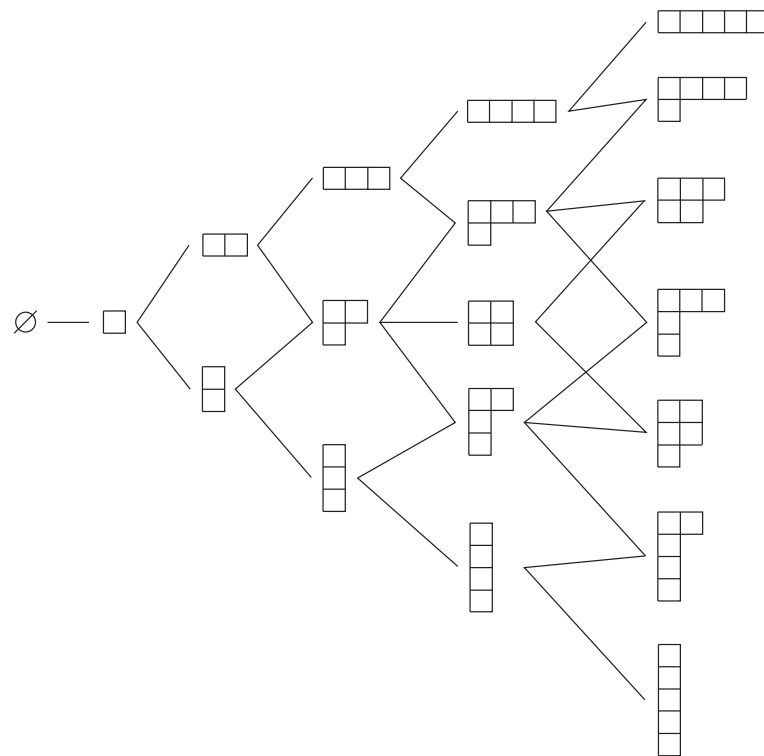
今回の集中講義では

- (対称群の) 表現の分岐則がつくりだす (おもしろい) 枝わかれ構造  
→ 分岐グラフ
- (筋道立てた) 計算の楽しさ

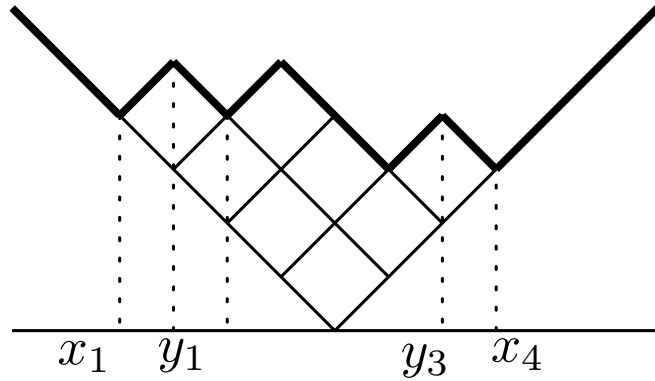
# 1. Young 図形集団における集中現象

Plancherel 測度と Plancherel 成長過程

$$M_{Pl}^{(n)}(\{\lambda\}) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!} \quad (\lambda \in \mathbb{Y}_n), \quad p^\uparrow(\nu, \mu) = \begin{cases} \frac{\dim \mu}{(|\nu|+1) \dim \nu}, & \nu \nearrow \mu \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$



Young 図形  $\lambda$  のプロフィール  $y = \lambda(x)$  と推移測度  $\mathfrak{m}_\lambda = \sum_{i=1}^r m_i \delta_{x_i} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$



$$\mathfrak{m}_\lambda(\{x_i\}) = m_i = p^\uparrow(\lambda, \mu^{(i)})$$

$\lambda \nearrow \mu^{(i)} : \lambda$  の  $x_i$  谷に箱 1 つ

$$\frac{(z - y_1) \cdots (z - y_{r-1})}{(z - x_1) \cdots (z - x_r)} = \frac{m_1}{z - x_1} + \cdots + \frac{m_r}{z - x_r}$$

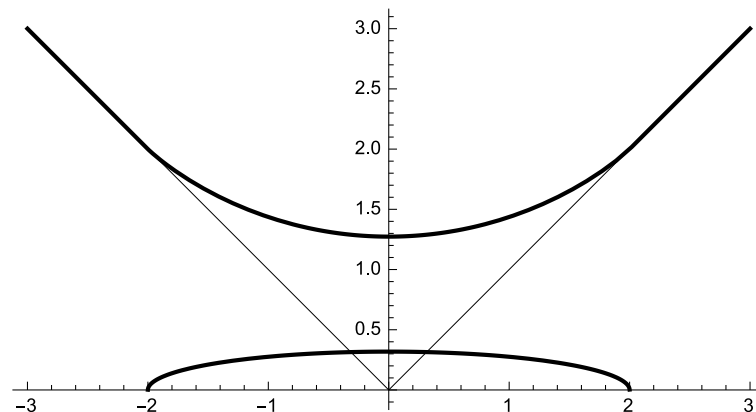
$\implies$  折れ線図形, 連続図形に拡張 :  $y = \omega(x) \longleftrightarrow \mathfrak{m}_\omega$

$\mathbb{D} = \{ \omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid |\omega(x) - \omega(y)| \leq |x - y|, \omega(x) = |x| \text{ (for } |x| \text{ 十分大)} \}$

Markov 変換  $\omega \longleftrightarrow \mathbf{m}_\omega$  の対応

$$\frac{1}{z} \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z} \left( \frac{\omega(x) - |x|}{2} \right)' dx \right\} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} \mathbf{m}_\omega(dx), \quad z \in \mathbb{C}^+$$

VKLS (Vershik-Kerov-Logan-Shepp) 極限形状  $\Omega \longleftrightarrow \mathbf{m}_\Omega$  : 標準半円分布



$\mathbb{D}$  のモーメント位相 :  $\left\{ \left| M_k(\mathbf{m}_{\omega_1}) - M_k(\mathbf{m}_{\omega_2}) \right| \right\}_{k \in \mathbb{N}}$

帰納極限位相  $\succ$  モーメント位相  $\succ$  一様収束位相

## Young 図形集団における集中の定式化

Plancherel 集団での VKLS 極限形状への集中はいろいろな方法で示されるが、動的モデルでは、巨視的時刻  $t$  ごとに集中を示したい (集中先は  $t$  に依存してかわる) ので、集中のメカニズムを一般的に把握しておく必要がある。

▷  $\mathbb{D}$  のモーメント位相に関する大数の法則を議論

- Young 図形の形状 — 山谷座標, 推移測度
- 代数的な計算 — 既約指標
- 推移測度と既約指標をつなぐ Kerov 多項式

$$\lambda \in \mathbb{Y}_n \quad \longrightarrow \quad [\lambda]^{\sqrt{n}}(x) = \lambda(\sqrt{n}x)/\sqrt{n} \quad \text{面積一定のスケール変換}$$

$\{(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  における  $\omega \in \mathbb{D}$  への集中の1つの表現 (大数の弱法則) :  
 モーメント位相に関する  $\omega$  の任意の近傍  $U \subset \mathbb{D}$  に対し,

$$\mathbb{M}^{(n)}(\{\lambda \in \mathbb{Y}_n \mid [\lambda]^{\sqrt{n}} \in U^c\}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

代数的な計算になじむように  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} & E_{\mathbb{M}^{(n)}}[(M_k(\mathbf{m}_{[\lambda]^{\sqrt{n}}}) - M_k(\mathbf{m}_\omega))^2] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ \iff & \begin{cases} E_{\mathbb{M}^{(n)}}[M_k(\mathbf{m}_{[\lambda]^{\sqrt{n}}})] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M_k(\mathbf{m}_\omega), \\ E_{\mathbb{M}^{(n)}}[(M_k(\mathbf{m}_{[\lambda]^{\sqrt{n}}})^2] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} M_k(\mathbf{m}_\omega)^2 \end{cases} \end{aligned}$$



さらに, この漸近的な乗法性が  $M_k(\mathbf{m}_{[\lambda]^{\sqrt{n}}})$  と  $M_k(\mathbf{m}_\omega)$  たちの多項式すべてで成り立つ状況を考える.

**定義 1** : 確率空間の列  $\{(Y_n, \mathbb{M}^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  において  $n \rightarrow \infty$  で  $\omega \in \mathbb{D}$  への集中が起こるとは,  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k_1, \dots, k_p \in \{2, 3, \dots\}$  に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\mathbb{M}^{(n)}} [M_{k_1}(\mathbf{m}_{[\lambda]^{\sqrt{n}}}) \cdots M_{k_p}(\mathbf{m}_{[\lambda]^{\sqrt{n}}})] = M_{k_1}(\mathbf{m}_\omega) \cdots M_{k_p}(\mathbf{m}_\omega)$$

このとき,  $\mathbb{D}$  の一様収束位相に関する大数の弱法則 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{M}^{(n)}(\{\lambda \in Y_n \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |[\lambda]^{\sqrt{n}}(x) - \omega(x)| > \epsilon\}) = 0$$

## 自由確率論への寄道

確率空間  $(\mathcal{A}, \phi)$  とは  $\mathcal{A}$ : 確率変数のなす  $*$ -代数  $\ni 1_{\mathcal{A}}$ ,  $\phi(a) = E_{\mathbb{P}}[a]$

$a \in (\mathcal{A}, \phi) \sim \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \iff \phi(a^p) = M_p(\mu) \ (\forall p \in \mathbb{N})$

確率空間の族  $\{(\mathcal{A}_i, \phi_i)\}_{i \in I}$

(イ)  $(\otimes_{i \in I} \mathcal{A}_i, \otimes_{i \in I} \phi_i)$ ,  $\mathcal{A}_j \subset \otimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{A}_j$  たちが独立 (independent)

(ロ)  $(*_i \in I \mathcal{A}_i, *_i \in I \phi_i)$ ,  $\mathcal{A}_j \subset *_i \in I \mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{A}_j$  たちが自由 (free)

$$a \sim \mu, b \sim \nu \text{ のとき} \quad a + b \sim \begin{cases} \mu * \nu & \text{if } a, b \text{ が独立} \\ \mu \boxplus \nu & \text{if } a, b \text{ が自由} \end{cases}$$

CLT :  $a_j \in \mathcal{A}_j$ ,  $a_j^* = a_j$ ,  $\phi_j(a_j) = 0$ ,  $\phi_j(a_j^2) = 1$  のとき

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{分布}} \begin{cases} g \sim \text{標準正規分布 } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx & \text{(イ)} \\ w \sim \text{標準半円分布 } \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} 1_{[-2,2]}(x) dx & \text{(ロ)} \end{cases}$$

$k$  次キュムラント  $C_k$ , 自由キュムラント  $R_k$

$$C_k(a + b) = C_k(a) + C_k(b) \quad \text{if } a, b \text{ が独立}, \quad C_k(\alpha a) = \alpha^k C_k(a)$$

$$R_k(a + b) = R_k(a) + R_k(b) \quad \text{if } a, b \text{ が自由}, \quad R_k(\alpha a) = \alpha^k R_k(a)$$

$$C_k(g) = \begin{cases} 1 & k = 2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}, \quad R_k(w) = \begin{cases} 1 & k = 2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

- ランダム行列, サイズ  $\rightarrow \infty$       Voiculescu
- ランダム置換, サイズ  $\rightarrow \infty$       Biane

$$(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \delta_e) \ni \begin{cases} \frac{(1\ 2) + (2\ 3) + \dots + (n-1\ n)}{\sqrt{n-1}} \\ \frac{(1\ n) + (2\ n) + \dots + (n-1\ n)}{\sqrt{n-1}} \end{cases} \text{の分布} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \text{標準正規分布} \\ \text{標準半円分布} \end{cases}$$

キュムラント・モーメント公式  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$\{1, 2, \dots, n\}$  の分割全体  $\mathcal{P}(n)$ , 非交差分割全体  $\mathcal{NC}(n)$  (半順序集合)

$$M_n(\mu) = \sum_{\pi = \{v_1, v_2, \dots\} \in \mathcal{P}(n)} C_{|v_1|}(\mu) C_{|v_2|}(\mu) \cdots = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}(n)} R_{|v_1|}(\mu) R_{|v_2|}(\mu) \cdots$$

Young 図形  $\lambda$  に対応する正規化された既約指標  $\tilde{\chi}^\lambda$  vs

推移測度  $m_\lambda$  のモーメント, キュムラント

$$\Sigma_\rho(\lambda) = |\lambda|^{\downarrow|\rho|} \tilde{\chi}_{(\rho, 1^{|\lambda|-|\rho|})}^\lambda, \quad \rho \in \mathbb{Y} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Y}_n, \quad \text{特に } \Sigma_k = \Sigma_{(k)}$$

$\mathbb{Y}$  上の関数のなす代数 (生成系:  $\{\Sigma_k(\lambda)\}, \{M_k(\mathbf{m}_\lambda)\}, \{R_k(\mathbf{m}_\lambda)\}, \dots$ )

$$\Sigma_k(\lambda) = R_{k+1}(\mathbf{m}_\lambda) + (R_{k-1}(\mathbf{m}_\lambda), \dots, R_2(\mathbf{m}_\lambda) \text{ の多項式})$$

$$\text{wt}(\Sigma_k) = \text{wt}(R_{k+1}) = k + 1, \quad \text{wt}(\text{低次項}) \leq k - 1$$

▷ サイズ  $\rightarrow \infty$  の極限で漸近的に自由確率論の相が現れる話をしたが、ここでは有限サイズの段階ですでに自由確率論の構造があらわになっている。

**定義 1'** : 確率空間の列  $\{(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  において  $n \rightarrow \infty$  で  $\omega \in \mathbb{D}$  への集中が起こるとは、

$$E_{\mathbb{M}^{(n)}}[\Sigma_{\rho \sqcup \sigma}] - E_{\mathbb{M}^{(n)}}[\Sigma_{\rho}] E_{\mathbb{M}^{(n)}}[\Sigma_{\sigma}] = o(n^{\frac{1}{2}(|\rho|+l(\rho)+|\sigma|+l(\sigma))}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

for  $\rho, \sigma \in \mathbb{Y}$  s.t.  $m_1(\rho) = m_1(\sigma) = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-k/2} E_{\mathbb{M}^{(n)}}[\Sigma_{k-1}] = r_k, \quad |r_k| \leq a^k, \quad k \geq 2$$

Plancherel 集団に対して定義 1' を確認するのは容易 (既約指標の直交関係) で、 $r_2 = 1, r_3 = r_4 = \dots = 0$ .

対応する連続図形  $\omega$  は VKLS 極限形状  $\Omega$

## 2. 制限誘導連続時刻ランダムウォーク

$$P_{\lambda\nu}^{\downarrow} = \begin{cases} \frac{\dim \nu}{\dim \lambda}, & \lambda \searrow \nu \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \quad P_{\nu\mu}^{\uparrow} = \begin{cases} \frac{\dim \mu}{(|\nu|+1)\dim \nu}, & \nu \nearrow \mu \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

対称群の既約表現の制限と誘導の既約分解

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \pi^\lambda \cong \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Y}_{n-1}: \lambda \searrow \nu} \pi^\nu, \quad \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \pi^\nu \cong \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Y}_n: \nu \nearrow \mu} \pi^\mu$$

$P^\uparrow$  と  $P^\downarrow$  の凸結合で表される  $\mathbb{Y}$  上の推移確率

$$P_{\lambda\mu}^{(\xi)} = \alpha_\xi(|\lambda|)P_{\lambda\mu}^{\uparrow} + (1 - \alpha_\xi(|\lambda|))P_{\lambda\mu}^{\downarrow}, \quad |\lambda| \geq 1$$

$$P_{\emptyset\Box}^{(\xi)} = \alpha_\xi(0), \quad P_{\emptyset\emptyset}^{(\xi)} = 1 - \alpha_\xi(0)$$

## Plancherel 測度 $\mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)}$ の Poisson 化

$$\mathbb{M}_{\text{PP}}^{(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\xi} \xi^n}{n!} \mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)} \quad (\xi > 0 : \text{空間のスケールパラメータ})$$

$$\blacktriangleright \alpha_{\xi}(n) = \int_0^1 \xi e^{-\xi x} (1-x)^n dx, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

とすると,  $0 < \alpha_{\xi}(n) < \alpha_{\xi}(n-1) < \dots < \alpha_{\xi}(0) = 1 - e^{-\xi} < 1$  で,  
 $P^{(\xi)}$  が  $\mathbb{M}_{\text{PP}}^{(\xi)}$  に関して対称

$\blacktriangleright$  定義 1 および 1' の意味の集中は Poisson 化に遺伝する. ただし, Young 図形のスケール変換は  $[\lambda]^{\sqrt{\xi}}(x) = \lambda(\sqrt{\xi}x)/\sqrt{\xi} \quad (\lambda \in \mathbb{Y})$

特に, 確率空間の族  $\{(\mathbb{Y}, \mathbb{M}_{\text{PP}}^{(\xi)})\}_{\xi>0}$  は定義 1 および 1' の意味で,  $\xi \rightarrow \infty$  で VKLS 極限形状  $\Omega$  に集中する.

カノニカル版 (箱数  $n$  が保存される系)

$\mathbb{Y}_n$  上の推移確率として

$$P^{(n)} = \begin{cases} P^\downarrow|_{\mathbb{Y}_n} P^\uparrow|_{\mathbb{Y}_{n-1}} & : \text{制限誘導連鎖} \\ P^\uparrow|_{\mathbb{Y}_n} P^\downarrow|_{\mathbb{Y}_{n+1}} & : \text{誘導制限連鎖} \end{cases}$$

▶  $P^{(n)}$  は Plancherel 測度  $(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)})$  に関して対称

$$\mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)}(\{\lambda\}) P_{\lambda\mu}^{(n)} = \mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)}(\{\mu\}) P_{\mu\lambda}^{(n)}$$

$(Z_k^{(n)})_{k \in \{0,1,2,\dots\}}$  : 推移行列  $P^{(n)}$  をもつ  $\mathbb{Y}_n$  上の制限誘導連鎖



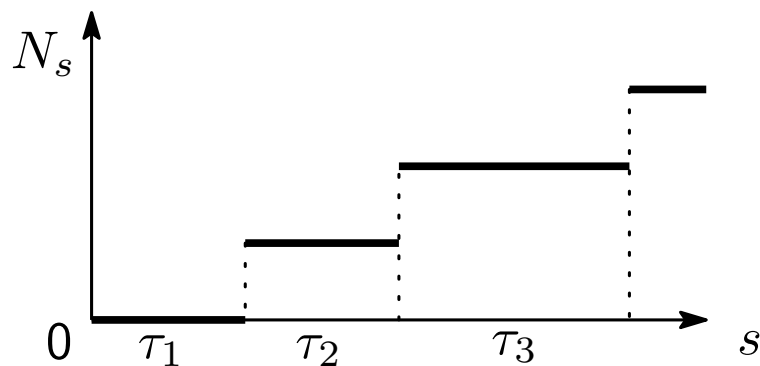
## 連続時刻ランダムウォーク (CTRW)

推移の間の待ち時間を独立同分布にとる

$\{\tau_j\}_{j \in \mathbb{N}} : [0, \infty)$  値 IID 列,  $\{(Z_k^{(n)})_{k \in \{0,1,2,\dots\}}\}_{n \in \mathbb{N}}$  とも独立

$\tau_1 \sim \psi \in \mathcal{P}([0, \infty))$        $\psi((0, \infty)) > 0$  ならば  $\tau_1 + \tau_2 + \dots$  が概発散

待ち時間  $\tau_j$  の計数過程 
$$N_s = \begin{cases} k, & \tau_1 + \dots + \tau_k \leq s < \tau_1 + \dots + \tau_{k+1} \\ 0, & 0 \leq s < \tau_1 \end{cases}$$



$$X_s^{(n)} = Z_{N_s}^{(n)}, \quad s \geq 0$$

$\mathbb{Y}_n$  上の連続時刻ランダムウォーク  $(X_s^{(n)})_{s \geq 0}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_s^{(n)} = \mu) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_j^{(n)} = \mu) \mathbb{P}(\tau_1 + \cdots + \tau_j \leq s < \tau_1 + \cdots + \tau_{j+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{M}_0^{(n)} P^{(n)j})_{\mu} \int_{[0,s]} \psi((s-u, \infty)) \psi^{*j}(du) \end{aligned}$$

$(\mathbb{M}_0^{(n)})$  は  $X_0^{(n)} = Z_0^{(n)}$  の分布)

★ G. H. Weiss: Aspects and Applications of the Random Walk,  
North-Holland, 1994

微視的空間スケール  $\sqrt{n} \rightarrow \infty$  と微視的時間スケール  $s \rightarrow \infty$  の適当なバランスのもとでのスケール極限

巨視的時刻  $t = s/\theta_n$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \infty$ )

確率空間の列  $\{(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  における  $\omega \in \mathbb{D}$  への集中 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\mathbb{M}^{(n)}} [M_{k_1}(\mathbf{m}_{[\lambda]\sqrt{n}}) \cdots M_{k_p}(\mathbf{m}_{[\lambda]\sqrt{n}})] = M_{k_1}(\mathbf{m}_\omega) \cdots M_{k_p}(\mathbf{m}_\omega)$$

## 問題

初期分布 (集団)  $\{(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}_0^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  において  $n \rightarrow \infty$  で  $\omega_0 \in \mathbb{D}$  への集中が起こるとする.

- 巨視的時刻  $t > 0$  に集中が伝播するか? すなわち,  $\{(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}_{t\theta_n}^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  において  $n \rightarrow \infty$  で或る  $\omega_t \in \mathbb{D}$  への集中が起こるか?
- $\omega_t$  の時間発展が記述できるか?

**定理 1** CTRW  $(X_s^{(n)})$  の時刻  $s \geq 0$  での分布を  $\mathbb{M}_s^{(n)}$  とする.

初期分布  $\{(Y_n, \mathbb{M}_0^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  において  $n \rightarrow \infty$  で  $\omega_0 \in \mathbb{D}$  への集中が起こるとする. 待ち時間分布  $\psi$  が平均  $m$  をもち,  $\psi$  の特性関数  $\varphi$  が

$$\int_{\{|\xi| \geq \delta\}} \left| \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \right| d\xi < \infty \quad (\exists \delta > 0)$$

をみたすとする. このとき, 任意の  $t > 0$  に対し,  $\{(Y_n, \mathbb{M}_{tn}^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  においても  $n \rightarrow \infty$  で集中が起こる. その極限形状を  $\omega_t \in \mathbb{D}$  とおく.  $\omega_t$  は推移測度の自由圧縮と自由合成積を用いて記述できる:

$$\mathbf{m}_{\omega_t} = (\mathbf{m}_{\omega_0})_{e^{-t/m}} \boxplus (\mathbf{m}_{\Omega})_{1-e^{-t/m}}$$

参考 : [Biane 1998 \(Adv. Math.\)](#) 静的モデルにおける集中現象でも,  
誘導 (outer product)  $\longrightarrow$  自由合成積,      制限  $\longrightarrow$  自由圧縮

**定理 2** 初期分布  $\{(Y_n, M_0^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  において  $n \rightarrow \infty$  で  $\omega_0 \in \mathbb{D}$  への集中が起こるとする. 待ち時間分布を指数  $\alpha \in (0, 1)$  の片側安定分布とする:

$$\varphi(\xi) = \exp\left\{-|\xi|^\alpha \left(1 - i \tan \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn}(\xi)\right)\right\}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

$t > 0$  に対し,  $s = t\theta_n$  での分布  $\{(Y_n, M_{t\theta_n}^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  について次が成り立つ.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n / n^{\frac{1}{\alpha}} = 0$  または  $\infty$  のとき,  $\{(Y_n, M_{t\theta_n}^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  においても  $n \rightarrow \infty$  で集中が起こる. 極限形状  $\omega_t \in \mathbb{D}$  は前者では  $\omega_0$  に一致し (初期のまま), 後者では  $\Omega$  に一致する (瞬時に極限まで).
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n / n^{\frac{1}{\alpha}} = 1$  のとき,  $\omega_0 = \Omega$  の場合のみ,  $\{(Y_n, M_{t\theta_n}^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  においても  $n \rightarrow \infty$  で集中が起こる. 任意の  $\omega_0 \in \mathbb{D}$  に対し,  $([\lambda]^{\sqrt{n}})$  自体は巨視的時刻  $t > 0$  で集中しなくとも)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{M_{t\theta_n}^{(n)}} [R_{k+1}(\mathbf{m}_{[\lambda]^{\sqrt{n}}})] = R_{k+1}(\mathbf{m}_{\omega_0}) \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \int_0^\infty \frac{e^{-t(k\xi \cos \frac{\pi\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}}} d\xi}{\xi^2 + 2\xi \cos(\pi\alpha) + 1}.$$

## 参考文献

- A. Hora: A diffusive limit for the profiles of random Young diagrams by way of free probability, Publ. RIMS Kyoto Univ. 51 (2015)
- A. Hora: The Limit Shape Problem for Ensembles of Young Diagrams, SpringerBriefs in Mathematical Physics 17, Springer, 2016
- 洞 彰人: 対称群の表現とヤング図形集団の解析学—漸近的表現論への序説, 数学の杜 4, 数学書房, 2017
- 洞 彰人: ヤング図形集団における極限形状とガウスゆらぎの動的モデル, 数理解析研究所講究録, 2018
- A. Hora: Effect of microscopic pausing time distributions on the dynamical limit shapes for random Young diagrams, arXiv:1901.03481

おわり