

レポート問題 (確率論 B)

次の中から任意題選んで解答してください (小問のとびとび選択等の部分解答も可). 提出締め切り, 提出方法については, 矢野先生の指示に従ってください.

問題 1 有限群 G 上の複素数値関数 f の Fourier 変換 \widehat{f} の定義を述べ, 次のことを示せ.

- (1) $\widehat{f * g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda), \quad \forall \lambda \in \widehat{G}.$
- (2) f が類関数ならば $\widehat{f}(\lambda)$ はスカラー行列である.

問題 2 Jucys–Murphy 元 X_i, X_{i+1} と $s_i = (i \ i+1)$ で生成される \mathfrak{S}_n ($i+1 \leq n$) の群環の部分代数の表現 (T, V_T) を考える. $T(X_i)$ と $T(X_{i+1})$ の同時固有ベクトル $v \in V_T$ をとり, v と $T(s_i)v$ が線型独立であるとする.

- (1) 基底 $\{v, T(s_i)v\}$ に関する $T(X_i), T(X_{i+1}), T(s_i)$ の表現行列を導け.
- (2) (1) で基底をとり直して, $T(X_i), T(X_{i+1})$ を対角化し, そのときの $T(s_i)$ の表現行列を導け.

問題 3 $\text{Cont}(n)$ の定義の条件のみを使って, $\text{Cont}(4), \text{Cont}(5)$ の元をすべて書き下せ. それぞれの元が定める Young 図形を書け.

問題 4 \mathbb{Y} 上の非負調和関数 φ が $\varphi(\emptyset) = 1$ をみたすとする. 筒集合 $C_{\lambda_0 \nearrow \dots \nearrow \lambda_n}$ に対する値を

$$M(C_{\lambda_0 \nearrow \dots \nearrow \lambda_n}) = \varphi(\lambda_n)$$

で定めることによって, Young グラフの経路空間上の確率測度が定義される. 測度の拡張定理を用いてこの手続きを正確に示せ.

問題 5 \mathbb{R} 上の正規分布と Poisson 分布の n 次キュムラントを計算せよ.

問題 6 (1) \mathbb{R} 上の半円分布の n 次自由キュムラントを計算せよ.

- (2) n 次自由キュムラントがすべて 1 である \mathbb{R} 上の分布の Stieltjes 変換を計算せよ.
- (3) (2) の Stieltjes 変換を与える \mathbb{R} 上の確率分布を求めよ.

問題 7 (難) Young グラフの経路空間上の Plancherel 測度のエルゴード性 (すなわち中心的確率測度全体のなす凸集合の端点であること) を示せ.

参考文献

- 有限群の表現, 対称群の表現, Frobenius の指標公式
 - G. James, A. Kerber: The representation theory of the symmetric group, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
 - Kleshchev: Linear and projective representations of symmetric groups, Cambridge UP, 2005.
 - I.G. Macdonald: Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd edition, Oxford UP, 1995.
 - 岡田聡一: 古典群の表現論と組合せ論, 培風館, 2006.
 - A. Okounkov, A. Vershik: A new approach to representation theory of symmetric groups, *Selecta Math. (N.S.)* 2 (1996), 581–605.
 - B. Simon: Representations of finite and compact groups, AMS, 1996.
 - 寺田至, ヤング図形のはなし, 日本評論社, 2002.
 - 寺田至, 原田耕一郎: 群論, 岩波講座現代数学の基礎, 1997.
 - A. Vershik, A. Okounkov: A new approach to the representation theory of the symmetric groups. II, *J. Math. Sci.* 131, 2005.
- Young 図形の解析的取り扱い, Young グラフ, 無限対称群の表現・指標
 - A. Hora: Lecture note on introduction to asymptotic theory for representations and characters of symmetric groups, *Lecture Notes at Wrocław Univ.*, 2007, 名大多元数理の洞のウェブページ.
 - A. Hora, N. Obata: Quantum probability and spectral analysis of graphs, Springer, 2007.
 - V. Ivanov, G. Olshanski: Kerov’s central limit theorem for the Plancherel measure on Young diagrams, In S. Fomin (ed.), *Symmetric functions 2001*, Kluwer Academic Publishers, 2002, 93–151.
 - S.V. Kerov: Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis, AMS, 2003.
 - E. Thoma: Die unzerlegbaren positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe, *Math. Z.* 85 (1964), 40–61.

- A.M. Vershik, S.V. Kerov: Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tables, Soviet Math. Dokl. 18 (1977), 527–531.
- A.M. Vershik, S.V. Kerov: Asymptotic theory of characters of the symmetric group, Funct. Anal. Appl. 15 (1982), 246–255.
- Hora–Obata, Kerov の本の文献表.

- 自由確率論

- P. Biane: Representations of symmetric groups and free probability, Adv. Math. 138 (1998), 126–181.
- A. Nica, R. Speicher: Lectures on the combinatorics of free probability, Cambridge UP, 2006.
- D.V. Voiculescu, K.J. Dykema, A. Nica: Free random variables, AMS, 1992.