２００７年度前期　数理科学展望 III（４年）・自然数理特論２（大学院）
レ ポ ー ト 問 題

担当　　洞　彰人　（大学院多元数理科学研究科）

▶ 定義, 術語等で不明なものは, 適宜講義のノートを参照すること.
▶ **提出期限は７月２０日（金）の正午**.

問題１． (1) $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ のサポートがコンパクトならば, μ のモーメント列 $\{M_0, M_1, M_2, \cdots\}$ が Carleman の条件

$$\sum_{m=1}^{\infty} M_{2m}^{-1/(2m)} = \infty \qquad (*)$$

をみたすことを示せ.

(2) 標準半円分布

$$\mu(dx) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\, 1_{[-2,2]}(x)dx$$

のモーメント列を計算せよ.

問題２． 標準正規分布

$$\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$$

のモーメント列を計算し, それが Carleman の条件 $(*)$ をみたすことを示せ.

問題３． (1) $\sin(n+1)\theta/\sin\theta$ が $\cos\theta$ の n 次多項式 $P_n(\cos\theta)$ で書けることを示せ.

(2) $U_n(x) = P_n(x/2)$ とおくと, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が問題１で与えた標準半円分布に付随する直交多項式であることを示せ. （これらは第２種 Chebyshev 多項式と呼ばれる.）

(3) その Jacobi 係数 $\{\omega_n\}, \{\alpha_n\}$ を求めよ.

問題４． 有限 Jacobi 係数 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-1} > 0$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ から３重対角の n 次 Jacobi 行列 T をつくる. 次のことを示せ.

(1) T の固有ベクトルの第０成分は０でない.

(2) T の固有値はすべて単純である.

(3) T の固有値 λ に属する固有ベクトル $f(\lambda)$ の第 k 成分を $f_k(\lambda)$ とする. (1) より $f_0(\lambda) = 1$ としておく. $P_k(\lambda) = \sqrt{\omega_k \cdots \omega_1} f_k(\lambda)$ とおくと, $P_k(\lambda)$ は次の漸化式をみたす.

$$\begin{aligned}
&P_0(\lambda) = 1, \qquad P_1(\lambda) = \lambda - \alpha_1, \\
&P_k(\lambda) = (\lambda - \alpha_k)P_{k-1}(\lambda) - \omega_{k-1}P_{k-2}(\lambda) \qquad (k = 2, \ldots, n-1), \\
&0 = (\lambda - \alpha_n)P_{n-1}(\lambda) - \omega_{n-1}P_{n-2}(\lambda).
\end{aligned}$$

問題５． 有限 Jacobi 係数 $\omega_1, \cdots, \omega_{n-1} > 0$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&P_0(z) = 1, \qquad P_1(z) = z - \alpha_1, \\
&P_k(z) = (z - \alpha_k)P_{k-1}(z) - \omega_{k-1}P_{k-2}(z) \qquad (k = 2, \ldots, n)
\end{aligned}$$

によって k 次モニック多項式 $P_k(z)$ を定める．このとき連分数式の有理式表示

$$\cfrac{1}{z-\alpha_1-\cfrac{\omega_1}{z-\alpha_2-\cfrac{\omega_2}{z-\alpha_3-\cfrac{\omega_3}{\ddots \quad \cfrac{\omega_{n-1}}{z-\alpha_n}}}}} = \frac{Q_{n-1}(z)}{P_n(z)}$$

が成り立つことを示せ．その際, $Q_k(z)$ に対する漸化式も求めよ.

問題６． 問題４の T の固有ベクトル $f(\lambda)$ を用いて

$$\mu = \sum_{\lambda\in\mathrm{Spec}T} \frac{1}{\|f(\lambda)\|^2}\delta_\lambda$$

で定義される測度 μ が

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu(dx) = \langle \boldsymbol{e}_0, T^n \boldsymbol{e}_0\rangle, \qquad n\in\mathbb{N}$$

をみたすことを示せ.

問題７． 有限 Jacobi 係数 $\omega_1=1$, $\alpha_1=\alpha_2=0$ に対し, Jacobi 行列 T, 付随する確率測度 μ, 直交多項式 $P_k(x)$, μ の Stieltjes 変換を求めよ.

問題８． $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ_n, μ について次が成り立つとする.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu_n(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu(dx), && f\in C_b(\mathbb{R})(=\{\mathbb{R}\text{ 上の有界連続関数 }\}),\\
&\lim_{n\to\infty} M_k(\mu_n) = m_k \ \in\mathbb{R}, && k\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

このとき, μ がすべての次数のモーメントを持ち, $M_k(\mu)=m_k$ が成り立つことを示せ.

問題９． 問題２の標準正規分布に付随する直交多項式について, 何か非自明な性質を述べてそれを示せ.

問題１０． $\mathbb{R}$ 上の絶対連続な確率測度に対する Stieltjes の逆転（反転）公式を示せ.

番外. 講義中に説明を省略したが実は説明が欲しかったという概念・術語などがあれば, これまでの他の講義ででてきたかどうかの如何を問わず, 指摘してください.