ランダムヤング図形の極限形状の時間発展における微視的待ち時間分布の効果について

洞　彰人　　(Akihito HORA)

北海道大学理学研究院　(Hokkaido University, Faculty of Science)

日本数学会年会,　2019 年 3 月 17 日,　於東京工業大学

導 入

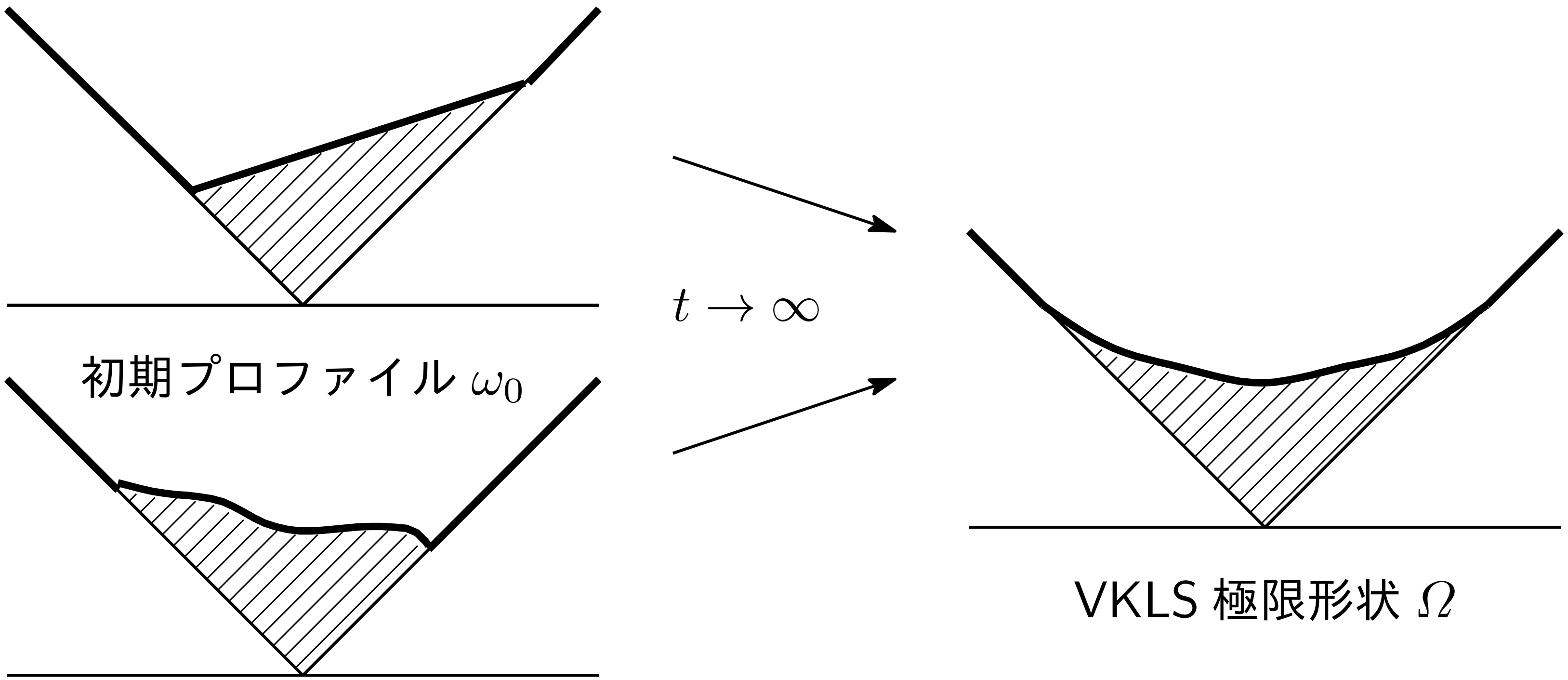
1. 静的モデル

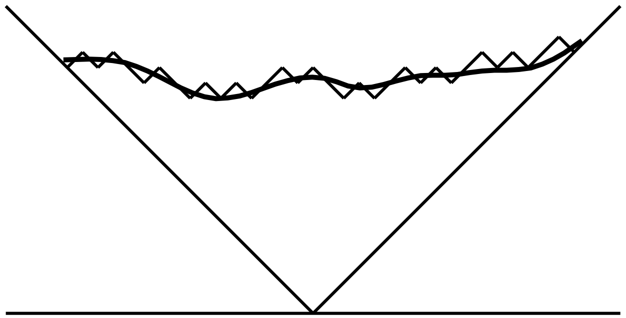
2. 制限誘導連続時刻ランダムウォーク

3. 動的モデル

$$\mathbb{D} = \left\{ \omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,\middle|\, \text{1-Lipschitz, 十分遠くで } \omega(x) = |x| \right\}$$

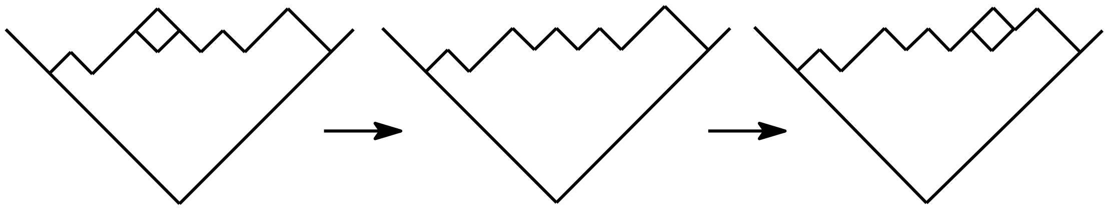
$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}\right), & |x| \leqq 2 \\ |x|, & |x| > 2 \end{cases}$$





$\int_{-\infty}^{\infty}(\omega(x) - |x|)dx = 2$

$\omega \in \mathbb{D}$ を $[\lambda]^{\sqrt{n}}$ $(\lambda \in \mathbb{Y}_n)$ で近似



$$\mathbb{Y}_n \to \mathbb{Y}_{n-1} \to \mathbb{Y}_n$$
$$\lambda \searrow \nu \nearrow \mu$$

・プロファイルの時間発展が Young 図形の集合上の「連続時刻ランダムウォーク」(微視的描像) のスケール極限で得られる (LLN)

・ランダムウォークの内部構造　$\widehat{\mathfrak{S}}_n \cong \mathbb{Y}_n = \{$ 箱数 n の Young 図形 $\}$: 対称群の既約表現の分岐則 (制限・誘導)

・ランダムウォークの待ち時間分布がプロファイルの時間発展に与える効果

1. 静的モデル

$\mathbb{Y}_n$ 上の Plancherel 測度 $M_{\mathrm{Pl}}^{(n)}(\{\lambda\}) = (\dim\lambda)^2/n!$ $(\lambda \in \mathbb{Y}_n)$

$\mathfrak{S}_n$ の正則表現の既約分解 $L \cong \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} [\dim\lambda]\,\pi^\lambda$

$\mathbb{Y}_n \subset \mathbb{D}$ とみなし, $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ に対して $[\lambda]^{\sqrt{n}}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\lambda(\sqrt{n}x)$ $(x \in \mathbb{R})$

▶ Plancherel 測度に関する VKLS 極限形状 (弱 LLN)

(Vershik-Kerov, Logan-Shepp, 1977)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| [\lambda]^{\sqrt{n}}(x) - \Omega(x) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{in } (\mathbb{Y}_n, M_{\mathrm{Pl}}^{(n)})$$

▶ 他の集団における極限形状 (弱 LLN)

・$\omega \in \mathbb{D}$ に収束する列 $[\lambda^{(n)}]^{\sqrt{n}}$, $\lambda^{(n)} \in \mathbb{Y}_n$ をとって $\{\delta_{\lambda^{(n)}}\}$

・群論的な集団 (ある種の表現の既約分解)

既約指標の期待値 (特性関数)： 置換のサイクル型を表す $\rho \in \mathbb{Y}_r$ について

$$E_{M^{(n)}}[\tilde{\chi}^{\cdot}_{(\rho,1^{n-r})}] = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \frac{1}{\dim \lambda} \chi^{\lambda}_{(\rho,1^{n-r})} M^{(n)}(\{\lambda\})$$

確率空間の列 $\{(\mathbb{Y}_n, M^{(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ の近似的乗法性 (AFP)： ρ, σ に対して

$$\mathbb{E}_{M^{(n)}}\left[\tilde{\chi}^{\cdot}_{(\rho\sqcup\sigma,1^{n-|\rho|-|\sigma|})}\right] - \mathbb{E}_{M^{(n)}}\left[\tilde{\chi}^{\cdot}_{(\rho,1^{n-|\rho|})}\right] \mathbb{E}_{M^{(n)}}\left[\tilde{\chi}^{\cdot}_{(\sigma,1^{n-|\sigma|})}\right]$$
$$= o\big(n^{-(|\rho|-l(\rho)+|\sigma|-l(\sigma))/2}\big) \qquad (n \to \infty)$$

命題 (極限形状への集中の十分条件)

(ア) $\{(\mathbb{Y}_n, M^{(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ が AFP をみたし，

(イ) $\exists \lim_{n\to\infty} n^{\frac{j-1}{2}} E_{M^{(n)}}[\tilde{\chi}^{\cdot}_{(j,1^{n-j})}] = r_{j+1}$ $(j \in \{2, 3, \cdots\})$ かつ多項式増大

$\Longrightarrow$ $\exists \omega \in \mathbb{D};$ $\quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \big| [\lambda]^{\sqrt{n}}(x) - \omega(x) \big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ in $(\mathbb{Y}_n, M^{(n)})$

2. 制限誘導連続時刻ランダムウォーク

$\mathbb{Y}_n$ 上の制限誘導連鎖の推移確率行列　$P^{(n)} = P^{\downarrow} P^{\uparrow}$

$$P^{\downarrow}_{\lambda\nu} = \begin{cases} \frac{\dim \nu}{\dim \lambda}, & \lambda \searrow \nu \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \qquad P^{\uparrow}_{\nu\mu} = \begin{cases} \frac{\dim \mu}{(|\nu|+1) \dim \nu}, & \nu \nearrow \mu \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

対称群の既約表現の制限と誘導の既約分解

$$\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \pi^{\lambda} \cong \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Y}_{n-1} : \lambda \searrow \nu} \pi^{\nu}, \qquad \mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \pi^{\nu} \cong \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Y}_n : \nu \nearrow \mu} \pi^{\mu}$$

- $P^{(n)}$ は Plancherel 測度に関して対称

$(Z^{(n)}_k)_{k \in \{0,1,2,\cdots\}}$: 推移行列 $P^{(n)}$ をもつ $\mathbb{Y}_n$ 上の制限誘導連鎖

$\{\tau_j\}_{j \in \mathbb{N}}$: $[0, \infty)$ 値 IID 列, $\{(Z^{(n)}_k)_{k \in \{0,1,2,\cdots\}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ とも独立, $\tau_j \neq 0$

$(N_s)_{s\geqq 0}$: τ_j を待ち時間にもつ計数過程

$$N_s = \sup\{j\in\mathbb{N} \,|\, \tau_1+\cdots+\tau_j \leqq s\} < \infty \text{ a.s.}, \quad N_0 \equiv 0 \text{ a.s.}$$

$\mathbb{Y}_n$ 上の連続時刻ランダムウォーク $\quad X_s^{(n)} = Z_{N_s}^{(n)}, \quad s \geqq 0$

$$\mathbb{P}(X_s^{(n)}=\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_j^{(n)}=\mu)\, \mathbb{P}(\tau_1+\cdots+\tau_j \leqq s, \tau_1+\cdots+\tau_{j+1} > s)$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} (M_0^{(n)} P^{(n)\,j})_\mu \int_{[0,s]} \psi((s-u,\infty))\, \psi^{*j}(du)$$

(ψ は τ_j の分布, $M_0^{(n)}$ は $X_0^{(n)} = Z_0^{(n)}$ の分布)

巨視的時刻 $t = s/\theta_n \quad (\lim_{n\to\infty}\theta_n = \infty)$

- $[X_{t\theta_n}^{(n)}]^{\sqrt{n}}$ の分布が $n\to\infty$ で t に依存した極限形状 ω_t に集中するか?
- ω_t の時間発展が記述できるか?

3. 動的モデル

定理 1 $(X_s^{(n)})$ の時刻 $s \geqq 0$ での分布を $M_s^{(n)}$ とする.
初期分布 $\{(\mathbb{Y}_n, M_0^{(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ が命題の (ア)(イ) をみたすとし，その極限形状を $\omega_0 \in \mathbb{D}$ とおく. 待ち時間分布 ψ が平均 m をもち, ψ の特性関数 φ が

$$\int_{\{|\xi|\geqq\delta\}} \left|\frac{\varphi(\xi)}{\xi}\right| d\xi < \infty \qquad (\exists\delta > 0)$$

をみたすとする. このとき，任意の $t > 0$ に対し，$\{(\mathbb{Y}_n, M_{tn}^{(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ も (ア)(イ) をみたす. その極限形状を $\omega_t \in \mathbb{D}$ とおく:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|[\lambda]^{\sqrt{n}}(x) - \omega_t(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{in } (\mathbb{Y}_n, M_{tn}^{(n)}).$$

ω_t は Kerov 推移測度の自由圧縮と自由合成積を用いて記述できる:

$$\mathfrak{m}_{\omega_t} = (\mathfrak{m}_{\omega_0})_{e^{-t/m}} \boxplus (\mathfrak{m}_{\Omega})_{1-e^{-t/m}}$$

定理 2　$(X_s^{(n)})$ の時刻 $s \geqq 0$ での分布を $M_s^{(n)}$ とする.
初期分布 $\{(\mathbb{Y}_n, M_0^{(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ が命題の (ア)(イ) をみたすとし，その極限形状を $\omega_0 \in \mathbb{D}$ とおく．待ち時間分布を指数 $\alpha \in (0,1)$ の片側安定分布とする:

$$\varphi(\xi) = \exp\Bigl\{-|\xi|^\alpha\Bigl(1 - i\tan\frac{\pi\alpha}{2}\mathrm{sgn}(\xi)\Bigr)\Bigr\}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

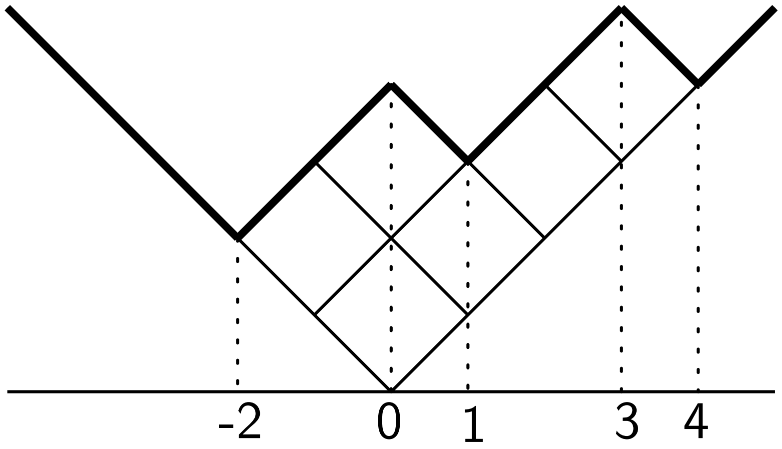
$s = t\theta_n$ での分布 $\{(\mathbb{Y}_n, M_{t\theta_n}^{(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(t>0)$ について次が成り立つ.
• $\lim_{n\to\infty}\theta_n/n^{\frac{1}{\alpha}} = 0$ または ∞ のとき，$\{(\mathbb{Y}_n, M_{t\theta_n}^{(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ も (ア)(イ) をみたす．極限形状 $\omega_t \in \mathbb{D}$ は前者では ω_0 に一致し，後者では Ω に一致する.
• $\lim_{n\to\infty}\theta_n/n^{\frac{1}{\alpha}} = 1$ のとき，$\omega_0 = \Omega$ の場合のみ，$\{(\mathbb{Y}_n, M_{t\theta_n}^{(n)})\}_{n\in\mathbb{N}}$ も AFP をみたす．このとき，($[\lambda]^{\sqrt{n}}$ が集中しなくとも)

$$\lim_{n\to\infty} E_{M_{t\theta_n}^{(n)}}\bigl[R_{k+1}(\mathfrak{m}_{[\lambda]^{\sqrt{n}}})\bigr] = R_{k+1}(\mathfrak{m}_{\omega_0})\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\int_0^\infty \frac{e^{-t(k\xi\cos\frac{\pi\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}}}d\xi}{\xi^2 + 2\xi\cos(\pi\alpha) + 1}.$$

Kerov の推移測度と Markov 変換

$\omega \in \mathbb{D}$ に対し

$$\frac{1}{z}\exp\Big\{\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x-z}\Big(\frac{\omega(x)-|x|}{2}\Big)'dx\Big\} = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z-x}\mathfrak{m}_\omega(dx), \qquad z \in \mathbb{C}^+$$



$$\frac{z(z-3)}{(z+2)(z-1)(z-4)} = \frac{5/9}{z+2} + \frac{2/9}{z-1} + \frac{2/9}{z-4}$$

$$\mathfrak{m}_\omega = \frac{5}{9}\delta_{-2} + \frac{2}{9}\delta_1 + \frac{2}{9}\delta_4$$

自由キュムラント, 自由合成積, 自由圧縮

μ, ν : $\mathbb{R}$ 上のコンパクト台の確率測度, $c \in (0,1]$, $k \in \mathbb{N}$

$$M_k(\mu) = \sum_{\pi : \{1,2,\cdots,k\} \text{ の非交差分割}} R_\pi(\mu),$$

$$R_\pi(\mu) = R_{|v_1|}(\mu) R_{|v_2|}(\mu) \cdots R_{|v_l|}(\mu), \quad (\pi = \{v_1, v_2, \cdots, v_l\})$$

$$R_k(\mu \boxplus \nu) = R_k(\mu) + R_k(\nu),$$

$$R_k(\mu_c) = c^{k-1} R_k(\mu)$$

Kerov 多項式

Young 図形上の多項式関数として

$$\Sigma_k(\lambda) = R_{k+1}(\mathfrak{m}_\lambda) + \text{(lower weight terms)}$$

ただし, $\Sigma_k(\lambda) = |\lambda|^{\downarrow k} \, \tilde{\chi}^\lambda_{(k, 1^{|\lambda|-k})}$

参考文献

- A. Hora: Effect of microscopic pausing time distributions on the dynamical limit shapes for random Young diagrams, arXiv:1901.03481v1 [math.PR] 11 Jan 2019
- A. Hora: A diffusive limit for the profiles of random Young diagrams by way of free probability, Publ. RIMS Kyoto Univ. 51 (2015)
- A. Hora: The Limit Shape Problem for Ensembles of Young Diagrams, SpringerBriefs in Mathematical Physics 17, Springer, 2016
- 洞彰人: 対称群の表現とヤング図形集団の解析学—漸近的表現論への序説, 数学の杜 4, 数学書房, 2017

G.H.Weiss: Aspects and Applications of the Random Walk, North-Holland, 1994

E.Lukacs: Characteristic Functions, Charles Griffin & Co Ltd, 1960

おわり