基礎数学 **A**　第 **1** 回中間試験　　2019.5.24.

- 試験開始まで開かないでください.
- 問題紙＋解答紙：A3 判 2 つ折り, 計算用紙 A4 判 1 枚. 計算用紙は回収しませんので, 必要なことは解答紙に書いてください.
- 解答の過程をたどれる程度に詳しく書いてください.
- 学生番号と氏名を必ず記入してください.
- もしも解答欄が足りない場合は, 続き具合を明確にして最後のページに書いてもかまいません.

【問題１】次の線形写像 $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2$ の核の次元と像の次元を求めなさい.

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+\cdots+x_{n-1} \\ x_2+\cdots+x_n \end{pmatrix}$$

【問題２】次の行列 A に対し, $P^{-1}AP=D$ をみたす正則行列 P と対角行列 D を求めなさい.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

【問題３】2 次以下の実数係数多項式全体 $\mathbb{R}[x]_2$ 上で, $f(x)$ を $f(x+a)$ にうつす線形変換 T を考える. ただし, a は 0 でない実数である.

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $1, x, x^2$ をとるとき, T の表現行列 B を求めなさい.

(2) B の固有値と固有空間を求めなさい.

(3) T の固有値と固有空間を求めなさい.

基礎数学 **A**　第 **2** 回中間試験　　2019.7.5.

- 試験開始まで開かないでください.
- 問題紙＋解答紙：A3 判 2 つ折り, 計算用紙 A4 判 3 枚. 計算用紙は回収しませんので, 必要なことは解答紙に書いてください.
- 答のみの指定がない問題は, 解答の過程をたどれる程度に途中経過を書いてください.
- 学生番号と氏名を記入してください.
- 解答欄が足りない場合は, 続き具合を明確にして最後のページに書いてください.

【問題１】次の行列式を計算し, 答のみ記しなさい. 後者は逆対角成分が 1 で他成分が 0 の n 次行列.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & -4 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \qquad\qquad \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & \cdots & \\ & \cdots & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} =$$

【問題２】次の対称行列 A の正則行列 P による対角化, および直交行列 T による対角化を求めなさい.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

【問題３】$\mathbb{C}^3$ の次のベクトル a, b の標準 (エルミート) 内積とノルムの値を計算し, 答のみ記しなさい.

$$a=\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-2i \\ 2+i \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2+i \end{pmatrix}. \qquad (a,b)= \qquad\qquad ,\ \|a\|= \qquad\qquad ,\ \|b\|=$$

【問題４】(1) $\mathbb{R}^3$ の標準内積に関してベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を直交化し, 正規直交基底 u_1, u_2, u_3 をつくりなさい.

(2) 3 次行列 A, B を $A = (a_1\ a_2\ a_3)$, $B = (u_1\ u_2\ u_3)$ で定めるとき, $A = BC$ をみたし, 対角成分がすべて正である上三角行列 C を求めなさい.

基礎数学 **A**　期末試験　2019.8.2.

- 試験開始まで開かないでください.
- 問題紙＋解答紙：A3 判 2 つ折り, 計算用紙 A4 判 3 枚. 計算用紙は回収しませんので, 必要なことは解答紙に書いてください.
- 答のみの指定がない問題は, 解答の過程をたどれる程度に途中経過を書いてください.
- 学生番号と氏名を記入してください.
- 解答欄が足りない場合は, 続き具合を明確にして最後のページに書いてください.

【問題１】次の行列 A の固有多項式 $f_A(x)$, 最小多項式 $\phi_A(x)$, ジョルダン標準形 J を求め, 答のみ記しなさい. 変換行列は求めなくてよい. $f_A(x), \phi_A(x)$ は因数分解されたままの形でよい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$f_A(x) =$

$\phi_A(x) =$

$J =$

【問題２】次の行列のユニタリ行列による対角化を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ -i & 3 & i \\ -1 & -i & 1 \end{pmatrix} \qquad (i \text{ は虚数単位})$$

【問題３】次の命題が正しいか正しくないかを述べ, その理由を記しなさい.

(1) 正方行列 A に対し, A^2 が零行列ならば, A も零行列である.

(2) エルミート行列 A に対し, A^2 が零行列ならば, A も零行列である.

(3) 同じサイズの正方行列 A, B に対し, AB の固有多項式と BA の固有多項式は等しい.

(4) 同じサイズの正方行列 A, B に対し, AB の最小多項式と BA の最小多項式は等しい.

【問題４】【4a】, 【4b】のどちらか 1 つを選んで解答しなさい.

【4a】ベクトル空間 V の部分空間 W に対し, V から V/W への自然な写像を π とする. V からベクトル空間 X への線形写像 f が $\mathrm{Ker}\, f \supset W$ をみたすとすれば, V/W から X への線形写像 ϕ で $f = \phi \circ \pi$ をみたすものがただ 1 つ存在することを示しなさい.

【4b】右の行列 A の k 乗 A^k を求め, 答のみ記しなさい (k は自然数): $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.