基礎数学 A　　2019.4.10. 出題,　**4.12. 提出**

【問】　$\mathbb{R}^n$ に 1 次独立なベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_l$ と, もう 1 組の 1 次独立なベクトル $b_1, b_2, \cdots, b_m$ があり, 任意の $b_j$ が $a_i$ たちの 1 次結合で表されるとする. このとき, $l$ と $m$ の間に成り立つ大小関係を述べ, それを証明しなさい.

基礎数学 A　　2019.4.17. 出題,　**4.19. 提出**

【問】　$T$ がベクトル空間 $V$ から $W$ への線形写像であるとする. $V$ に属するベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_k$ に対する次の (1), (2) について, 正しければ証明を誤りならば反例を与えなさい.

(1) $a_1, a_2, \cdots, a_k$ が $V$ で 1 次独立ならば, $Ta_1, Ta_2, \cdots, Ta_k$ が $W$ で 1 次独立である.

(2) $Ta_1, Ta_2, \cdots, Ta_k$ が $W$ で 1 次独立ならば, $a_1, a_2, \cdots, a_k$ が $V$ で 1 次独立である.

基礎数学 A　　2019.4.24. 出題,　**4.26. 提出**

【問】　ベクトル空間 $U$ と $V$ と $W$ がそれぞれ基底 $u_1, \cdots, u_p$ と $v_1, \cdots, v_q$ と $w_1, \cdots, w_r$ をもつとする. 線形写像 $f : U \longrightarrow V$ と $g : V \longrightarrow W$ を考える. 上の基底に関する $f$ と $g$ の表現行列がそれぞれ $A$ と $B$ であるとすると, 合成写像 $g \circ f$ の表現行列が積 $BA$ であることを示しなさい.

基礎数学 A　　2019.5.8. 出題,　**5.10. 提出**

【問】　行列 $A$ が異なる固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ をもつとし, 各 $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ に対して $x_i, x_i'$ が $\alpha_i$ に属する $A$ の固有ベクトルであるとする. それらが

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = x_1' + x_2' + \cdots + x_k'$$

をみたすとき, 任意の $i$ に対して $x_i = x_i'$ であることを示しなさい. ($k = 2$ に限定して示してもよい. この問題は, 「異なる固有値に属する固有空間の和は直和になる」ことを示す.)

基礎数学 A　　2019.5.15. 出題,　**5.17. 提出**

【問】　ベクトル空間 $V$ の部分空間 $W_1, W_2, W_3$ が $V = W_1 + W_2 + W_3$ をみたすとする.

(1) $W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_3 = W_3 \cap W_1 = \{0\}$ であっても, $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ とは限らないことを (たとえば $V = \mathbb{R}^2$ で反例を考えることによって) 示しなさい.

(2) $W_1 \cap W_2 = (W_1 + W_2) \cap W_3 = \{0\}$ ならば $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ となることを示しなさい.

基礎数学 A　　2019.6.05. 出題,　**6.12. 提出**

【問】　内積を備えた実ベクトル空間 $V$ において, 部分空間 $W$ の直交補空間を $W^\perp$ で表す. $V$ の部分空間 $W_1, W_2$ に対し, $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ が成り立つことを示しなさい.

基礎数学 A　　2019.6.12. 出題,　**6.14. 提出**

【問】　内積 $(\ ,\ )$ を備えた実ベクトル空間 $V$ において, 部分空間 $W$ の正規直交基底 $u_1, \cdots, u_m$ をとって, $V$ から $W$ への線形写像 $P$ を

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, u_j) u_j, \qquad x \in V$$

によって定める. このとき, $P^2 = P$ が成り立つことを示しなさい.

基礎数学 A　　2019.6.19. 出題,　**6.21. 提出**

【問】　内積 $(\ ,\ )$ を備えた実ベクトル空間 $V$ において, 部分空間への直交射影 $P$ が対称変換であること, すなわち

$$(Px, y) = (x, Py), \qquad \forall\, x,\ y \in V$$

が成り立つことを示しなさい.

基礎数学 A　　2019.6.26. 出題,　**6.28. 提出**

【問】　実正方行列 $A$ が (i) 直交行列 (ii) 正の対角成分をもつ上三角行列 の 2 つの条件をみたせば, $A$ は単位行列に限ることを示しなさい.

基礎数学 A　　2019.7.10. 出題,　**7.12. 提出**

【問】　(本問はジョルダン標準形の準備である. 以下の問には答のみ記せばよい.)

(1) 2 以上の自然数 $n$ に対し, 対角線の直上の成分だけに 1 が並んで他成分が 0 の $n$ 次行列を $J$ とする:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$R^{-1}JR = {}^tJ$ をみたす $n$ 次行列 $R$ を 1 つ求めなさい.

(2) $A$ を $m$ 次正方行列, $B$ を $n$ 次正方行列とする. 次式をみたす $m+n$ 次行列 $P$ を 1 つ求めなさい. 空白の部分には成分 0 が入っている. 単位行列を $E$ で表すときは, $E_r$ のようにサイズを記すこと.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} B & \\ & A \end{pmatrix}$$

(3) $A_1, \cdots, A_p$ をそれぞれ $k_1, \cdots, k_p$ 次の正方行列とし, $n = k_1 + \cdots + k_p$ とおく. $1, \cdots, p$ の置換 $\sigma$ に対し, 次式をみたす $n$ 次行列 $Q$ を 1 つ求めなさい. 空白の部分には成分 0 が入っている. 単位行列を $E$ で表すときは, $E_r$ のようにサイズを記すこと.

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & & & \\ & A_{\sigma(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{\sigma(p)} \end{pmatrix}$$

基礎数学 A　　2019.7.17. 出題,　**7.19. 提出**

【問】　(本問はジョルダン標準形の準備である. 以下の問には答のみ記せばよい.)

(1) 各 $j \in \mathbb{N}$ に対し, 対角線の直上の成分だけに 1 が並んで他成分が 0 の $j$ 次行列

$$J(0,j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad J(0,1) = (0)$$

を考える. $k \in \mathbb{N}$ に対し, $\dim \mathrm{Ker} J(0,j)^k$ を求めなさい.

(2) $m \in \mathbb{N}$, $p_1, \cdots, p_{m-1} \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, $p_m \in \mathbb{N}$ とし, 対角線上に左上から順に $J(0,m)$ が $p_m$ 個, $J(0,m-1)$ が $p_{m-1}$ 個, $\cdots$, $J(0,1)$ が $p_1$ 個並んだブロック対角型の $n$ 次行列を $C$ とする ($p_m \geqq 1$ である

が, $p_1, \cdots, p_{m-1}$ は 0 でもよい):

$$C = \begin{pmatrix} J(0,m) & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & J(0,m) & & & & & \\ & & & J(0,m-1) & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & J(0,m-1) & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad n = \sum_{j=1}^{m} j p_j.$$

$C^k$ がどのような行列になるかを認識した上で,

$$\begin{pmatrix} \dim \mathrm{Ker}\ C \\ \vdots \\ \dim \mathrm{Ker}\ C^m \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{rank}\ C^0 \\ \mathrm{rank}\ C \\ \vdots \\ \mathrm{rank}\ C^{m-1} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$$

をみたす $m$ 次行列 $Q, R$ を求めなさい. さらに, $\det Q = \det R = 1$ であることを確認した後, $Q^{-1}, R^{-1}$ を求めなさい.