基礎数学 A の講義メモ (広義固有空間分解とジョルダン標準形)

2019(R1) 7 月 (8 月改訂)　　　　洞　彰人

小さなサイズの行列 (ただし固有値が明示的に求まる場合) での手計算の実践に留意し, 広義固有空間分解とジョルダン標準形について以下の要領で講義を進めることにした. 講義メモをまとめておく. あくまでもメモなので, (用語・記号の定義も含めて) 説明は不親切であろう. 文献は比較的古いものしか知らないので, 適切な引用がなされていないかもしれない.

1. 線形変換 A の広義固有空間への直和分解を示す. 広義固有空間への射影を構成して, A を半単純部分とべき零部分に分解し, べき乗計算の実践例を挙げる.
2. べき零線形変換の表現行列がジョルダンブロックの直和に書けることを帰納法で示す.
3. ジョルダンブロックの現れ方 (与えられた固有値と大きさのものが何個ずつ現れるか) をもとの A についての情報で記述する.
4. 小さなサイズの行列で実践例を挙げる.

1. は笠原先生が昔からいろいろなところに書かれていた方法に概ねしたがう ([2], [3] 等). 2. と 3. は [6], [4] のハイブリッドのような感じでいく.

1.1. 多項式の性質を 2 つ確認する.

- 代数学の基本定理: $\mathbb{C}[x]$ の元は 1 次式の積に因数分解される. (これ以上の説明略.)
- $f_1, \cdots, f_n \in \mathbb{C}[x]$ の最大公約数 (GCD) が h ならば, $f_1g_1 + \cdots + f_ng_n = h$ をみたす $g_1, \cdots, g_n \in \mathbb{C}[x]$ がある. (2 個のときは GCD をみつけるユークリッドの互除法を用い, 帰納法で n までいけばよい. たとえば [7] 参照.)

1.2. $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V, 線形変換 $A : V \longrightarrow V$, $f \in \mathbb{C}[x]$ が $f(A) = 0$ をみたすとする. 異なる $\lambda_j \in \mathbb{C}$ によって $f(x) = (x - \lambda_1)^{p_1} \cdots (x - \lambda_k)^{p_k}$ と表し,

$$W_j = \mathrm{Ker}(A - \lambda_j I)^{p_j} = \{v \in V \mid (A - \lambda_j I)^{p_j} v = 0\}$$

とおく. ($W_j = \{0\}$ もありうる.) このとき, A の不変部分空間への直和分解 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ が成り立つ.

($\because$) $f(x)/(x - \lambda_j)^{p_j} = f^{(j)}(x)$ とおくと $(j = 1, \ldots, k)$, $f^{(1)}, \cdots, f^{(k)}$ の GCD は 1 であるから, $g_1, \cdots, g_k \in \mathbb{C}[x]$ がとれて

$$f^{(1)}g_1 + \cdots + f^{(k)}g_k = 1, \qquad \therefore\ f^{(1)}(A)g_1(A) + \cdots + f^{(k)}(A)g_k(A) = I.$$

$f^{(j)}(A)g_j(A)V \subset W_j$ であるから, これは $V = W_1 + \cdots + W_k$ を示す. 直和であることを見よう.

$v \in W_1 \cap W_2$ であれば, $f^{(j)}(A)v$ がすべて 0 になるので, $v = 0$. 一般に $v \in (W_1 + \cdots + W_{j-1}) \cap W_j$ のときも, j 以外の l では $f^{(l)}(A)g_l(A)v = 0$ なので,

$$v = f^{(j)}(A)g_j(A)v = f^{(j)}(A)g_j(A)(v_1 + \cdots + v_{j-1}) = 0.$$

$\therefore\ W_1 + \cdots + W_k = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. ■

1.3. 線形変換 A の固有多項式を $f_A(x)$ とすると, A の異なる固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ として

$$f_A(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}, \qquad n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}.$$

ケーリー・ハミルトンの定理から $f_A(A)=0$ である. $\widetilde{W}(\lambda_j)=\mathrm{Ker}(A-\lambda_j I)^{n_j}$ とおくと, **1.2** から

$$V=\widetilde{W}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\widetilde{W}(\lambda_k).$$

$\{0\}\neq\mathrm{Ker}(A-\lambda_j I)\subset\widetilde{W}(\lambda_j)$ である. $\widetilde{W}(\lambda_j)$ を A の λ_j に属する広義 (一般, 拡大, 準, 弱) 固有空間と呼ぶ.

1.4. $\widetilde{W}(\lambda_j)=\bigcup_{p=1}^{\infty}\mathrm{Ker}(A-\lambda_j I)^p$

($\because$) $\forall r\in\mathbb{N}$ に対し, $f(x)=(x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_j)^{n_j+r}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k}$ も $f(A)=0$ をみたすので, **1.2** から V の直和分解を得るが, **1.3** と比べて

$$\mathrm{Ker}(A-\lambda_j I)^{n_j+r}\supset\mathrm{Ker}(A-\lambda_j I)^{n_j}$$

は等号でなければならない. ■

1.5. $\dim\widetilde{W}(\lambda_j)=n_j\quad(j=1,\ldots,k)$. 　　($A$ の固有値の「代数的重複度」が広義固有空間の次元に一致.)

($\because$) 広義固有空間分解 $V=\widetilde{W}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\widetilde{W}(\lambda_k)$ に沿った A の表現行列 $\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_k)$ をとる. ブロック対角型の行列を $\mathrm{diag}(\cdots)$ で表す. $\widetilde{W}(\lambda_j)$ の基底 $v_1^{(j)},v_2^{(j)},\cdots$ があって

$$\big((A-\lambda_j I)^{n_j}v_1^{(j)}\ \ (A-\lambda_j I)^{n_j}v_2^{(j)}\ \ \cdots\big)=(v_1^{(j)}\ v_2^{(j)}\ \cdots)(A_j-\lambda_j I)^{n_j}$$

であるから, $(A_j-\lambda_j I)^{n_j}=0$. したがって $A_j-\lambda_j I$ の固有値は 0 のみで, その固有多項式は $x^{\dim\widetilde{W}(\lambda_j)}$.

$$x^{\dim\widetilde{W}(\lambda_j)}=\det(xI-(A_j-\lambda_j I))=\det((x+\lambda_j)I-A_j)=f_{A_j}(x+\lambda_j)$$

であるから, $f_{A_j}(x)=(x-\lambda_j)^{\dim\widetilde{W}(\lambda_j)}$. 一方, $f_A=f_{A_1}\cdots f_{A_k}$ なので,

$$f_A(x)=(x-\lambda_1)^{\dim\widetilde{W}(\lambda_1)}\cdots(x-\lambda_k)^{\dim\widetilde{W}(\lambda_k)}.$$

これは主張を意味する. ■

1.6. 広義固有空間への射影を求める. **1.2** の証明から, **1.3** における $\widetilde{W}(\lambda_j)$ への射影は

$$Q_j=f_A^{(j)}(A)g_j(A)\qquad(\text{ただし } f_A^{(1)}g_1+\cdots+f_A^{(k)}g_k=1)$$

で与えられる. Q_j は A と可換で, $Q_j^2=Q_j$, $Q_iQ_j=0$ $(i\neq j)$ をみたす. $g_j(x)$ は部分分数分解

$$\frac{1}{f_A(x)}=\frac{g_1(x)}{(x-\lambda_1)^{n_1}}+\cdots+\frac{g_k(x)}{(x-\lambda_k)^{n_k}}$$

から計算できる.

1.7. A のべき乗の計算への応用. **1.6** の射影の族 $\{Q_j\}_{j=1}^k$ を用いて

$$\begin{aligned}
A&=A(Q_1+\cdots+Q_k)=(\lambda_1Q_1+(A-\lambda_1I)Q_1)+\cdots+(\lambda_kQ_k+(A-\lambda_kI)Q_k)\\
A^r&=(\lambda_1Q_1+(A-\lambda_1I)Q_1)^r+\cdots+(\lambda_kQ_k+(A-\lambda_kI)Q_k)^r\\
&=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\lambda_1^{r-i}(A-\lambda_1I)^iQ_1+\cdots+\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\lambda_k^{r-i}(A-\lambda_kI)^iQ_k.\\
&=\sum_{i=0}^{n_1-1}\binom{r}{i}\lambda_1^{r-i}(A-\lambda_1I)^iQ_1+\cdots+\sum_{i=0}^{n_k-1}\binom{r}{i}\lambda_k^{r-i}(A-\lambda_kI)^iQ_k.
\end{aligned}$$

和の上端が r によらないのがよい．これから A の指数関数 $e^{tA}=\sum_{r=0}^{\infty}t^rA^r/r!$ も計算できる．

【例】 [2] p.93 例 17.13

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix},\qquad A^r=\begin{pmatrix}-r+2^r&1+r-2^r&r\\-r&1+r&r\\-1+2^r&1-2^r&1\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{f_A(x)}=\frac{1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{-x}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-2},\qquad Q_1=-A(A-2E),\quad Q_2=(A-E)^2,$$

$$A^r=(AQ_1+AQ_2)^r=(Q_1+(A-E)Q_1)^r+(2Q_2)^r=Q_1+r(A-E)Q_1+2^rQ_2.$$

1.8. 線形変換 A に対し, $f(A)=0$ をみたす $f\in\mathbb{C}[x]$ のうちで次数が最小のモニックなものを A の最小多項式と呼ぶ．このメモでは, A の最小多項式を ϕ_A で表す．$f(A)=0$ ならば, $\phi_A|f$.

($\because$) $\deg f\geqq\deg\phi_A$ なので, $f=g\phi_A+h$, $\deg h<\deg\phi_A$．しかし,

$0=f(A)=g(A)\phi_A(A)+h(A)=h(A)\qquad\therefore\ h=0.$ ■

これから ϕ_A の一意性もしたがう．また, $\phi_A|f_A$.

1.9. 直和分解 **1.2** の結果を ϕ_A に適用する．$\phi_A|f_A$ であるから,

$$\phi_A(x)=(x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_l)^{m_l},\qquad l\leqq k,\quad m_j\leqq n_j$$

としてよい．**1.2** と **1.3** から

$$\mathrm{Ker}(A-\lambda_1I)^{m_1}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(A-\lambda_lI)^{m_l}=V=\widetilde{W}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\widetilde{W}(\lambda_k).$$

したがって $l=k$ かつ $\mathrm{Ker}(A-\lambda_jI)^{m_j}=\widetilde{W}(\lambda_j)$ $(j=1,\ldots,k)$ でなければならない．特に, 最小多項式 ϕ_A の根は A の固有値すべてをつくす.

こうして, 線形変換 $A:V\longrightarrow V$ のすべての異なる固有値 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ を用いて

固有多項式	$f_A(x)=(x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k}$,	$n_j\in\mathbb{N}$,
最小多項式	$\phi_A(x)=(x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$,	$m_j\in\mathbb{N},\quad m_j\leqq n_j$

と表された．ここで, $j=1,\ldots,k$ に対して $\mathrm{Ker}(A-\lambda_jI)^{m_j}=\mathrm{Ker}(A-\lambda_jI)^{n_j}=\widetilde{W}(\lambda_j)$.

1.10. $\mathrm{Ker}(A-\lambda_jI)^{m_j-1}\subsetneqq\mathrm{Ker}(A-\lambda_jI)^{m_j}\qquad(j=1,\ldots,k).$

($\because$) $(A-\lambda_1I)^{m_1}\cdots(A-\lambda_jI)^{m_j-1}\cdots(A-\lambda_kI)^{m_k}v\neq0$ となる $v\in V$ があるが, V が $\widetilde{W}(\lambda_j)$ の直和なので, この左辺は

$$(A-\lambda_1I)^{m_1}\cdots(A-\lambda_jI)^{m_j-1}\cdots(A-\lambda_kI)^{m_k}v_j,\qquad v_j\in\widetilde{W}(\lambda_j)$$

の形である．$\therefore\ v_j\notin\mathrm{Ker}(A-\lambda_jI)^{m_j-1}$. ■

これから, $(A-\lambda_jI)|_{\widetilde{W}(\lambda_j)}$ の最小多項式が x^{m_j}, すなわち $A|_{\widetilde{W}(\lambda_j)}$ の最小多項式が $(x-\lambda_j)^{m_j}$ であることがわかる．逆に, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$ に対して $A|_{\widetilde{W}(\lambda_j)}$ の最小多項式が $(x-\lambda_j)^{m_j}$ であるとしよう．$i\neq j$ のとき, $(A-\lambda_iI)|_{\widetilde{W}(\lambda_j)}$ は全単射になるので, A の最小多項式として $\prod_{j=1}^{k}(x-\lambda_j)^{m_j}$ を得る.

1.11. 線形変換 A が対角化可能 $\iff\phi_A(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)$

($\because$) 対角化可能 $\iff V=\mathrm{Ker}(A-\lambda_1I)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(A-\lambda_kI)$. **1.9**, **1.10** から, これは $m_1=\cdots=m_k=1$ と同値. ■

2.1. $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V 上の線形変換 A に対し, A の広義固有空間分解 $V = \widetilde{W}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_k)$ と射影 $Q_j : V \longrightarrow \widetilde{W}(\lambda_j)$ によって, **1.7** のように

$$A = \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_k Q_k + (A - \lambda_1 I)Q_1 + \cdots + (A - \lambda_k I)Q_k$$

という半単純部分とべき零部分への分解を得た. **1.10** で見たように, この $A - \lambda_j I$ を不変部分空間 $\widetilde{W}(\lambda_j)$ に制限した線形変換 $(A - \lambda_j I)|_{\widetilde{W}(\lambda_j)}$ の最小多項式が x^{m_j} であった. このべき零部分のさらなる考察 (基底の選び方の工夫) から, A の表現行列としてのジョルダン標準形が導かれる.

2.2. $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $W \neq \{0\}$ 上のべき零線形変換 N に対し, W の基底で次のようなものがある:

$$\star \begin{cases} w_1, & Nw_1, & \cdots, & N^{j_1-1}w_1, & (N^{j_1}w_1 = 0) \\ w_2, & Nw_2, & \cdots, & N^{j_2-1}w_2, & (N^{j_2}w_2 = 0) \\ & & \cdots, & & \\ w_r, & Nw_r, & \cdots, & N^{j_r-1}w_r, & (N^{j_r}w_r = 0) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} j_1, j_2, \cdots, j_r \in \mathbb{N} \\ j_1 + j_2 + \cdots + j_r = \dim W. \end{array}$$

($\because$) まず, W の元 $w, Nw, \cdots, N^{j-1}w$ がどれも 0 でなくて $N^j w = 0$ となるとき, $w, Nw, \cdots, N^{j-1}w$ が 1 次独立であることを見ておこう. $\alpha_1 w + \alpha_2 Nw + \cdots + \alpha_j N^{j-1}w = 0$ とすると, これに N^{j-1} を作用させて, $\alpha_1 N^{j-1}w = 0$. $\therefore\ \alpha_1 = 0$. 次に $N^{j-2}(\alpha_2 Nw + \cdots + \alpha_j N^{j-1}w) = 0$ から, $\alpha_2 = 0$. 順次進んで $\alpha_j = 0$.

W の次元に関する帰納法によって主張を示す. そのため, $\dim W$ よりも小さな次元をもつ部分空間に着目する. $NW = W$ ならば N がべき零にならないので, $\dim NW < \dim W$. もしも $NW = \{0\}$ ならば $N = 0$ なので, W の基底 $w_1, \cdots, w_r$ をとればよい ($j_1 = \cdots = j_r = 1$). $NW \neq \{0\}$ ならば, NW 上のべき零変換 $N|_{NW}$ に対し, NW に $\star$ のような基底をとる. NW の基底の原像 (の 1 つ) に $\mathrm{Ker}N$ の基底をあわせて (これら全体は 1 次独立)W の基底をつくれる ($\dim W = \mathrm{null}N + \mathrm{rank}N$ の証明を思い出そう). そこで, $w_1 = Nu_1, \cdots, w_r = Nu_r$ となる $u_1, \cdots, u_r \in W$ をとる. こうして, (i) NW の基底の原像として:

$$u_1, w_1(= Nu_1), \cdots, N^{j_1-2}w_1(= N^{j_1-1}u_1),\ \cdots, \cdots,\ u_r, w_r(= Nu_r), \cdots, N^{j_r-2}w_r(= N^{j_r-1}u_r),$$

(ii) $\mathrm{Ker}N$ の基底として:

$$N^{j_1-1}w_1(= N^{j_1}u_1), \cdots, N^{j_r-1}w_r(= N^{j_r}u_r),$$

これらが $\mathrm{Ker}N$ を生成しなければ, 他に (iii) $u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots \in W$ を付け加えて $\mathrm{Ker}N$ の基底をつくる. (このとき $Nu_{r+1} = Nu_{r+2} = \cdots = 0$.)

(i), (ii), (iii) をあわせると, $\star$ の性質をみたすような W の基底になっている. ■

2.3. 上記の基底を

$$N^{j_1-1}w_1, \cdots, Nw_1, w_1,\ N^{j_2-1}w_2, \cdots, Nw_2, w_2,\ \cdots, \cdots,\ N^{j_r-1}w_r, \cdots, Nw_r, w_r$$

の順に並べると, それに関する N の表現行列は $\mathrm{diag}\big(J(0, j_1), J(0, j_2), \cdots, J(0, j_r)\big)$ である. ただし, $\alpha \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$ に対し, j 次行列

$$J(\alpha, j) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix}, \qquad J(\alpha, 1) = (\alpha)$$

を大きさ j のジョルダンブロック (細胞) と呼ぶ. たとえば, $r=2$, $j_1=3$, $j_2=2$ として

$$(0\ N^2w_1\ Nw_1\ 0\ Nw_2) = (N^2w_1\ Nw_1\ w_1\ Nw_2\ w_2)\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

ジョルダンブロックにおいて, 成分 1 を対角線の直上でなく直下に並べる流儀もある. また, ジョルダンブロックたちの順番の並びかえも行いたい. このことに関連して次の宿題を出した.

【問 1】 (本問はジョルダン標準形の準備である. 以下の問には答のみ記せばよい.)

(1) 2 以上の自然数 n に対し, 対角線の直上の成分だけに 1 が並んで他成分が 0 の n 次行列を J とする:

$$J = \begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}.$$

$R^{-1}JR = {}^tJ$ をみたす n 次行列 R を 1 つ求めなさい.

(2) A を m 次正方行列, B を n 次正方行列とする. 次式をみたす $m+n$ 次行列 P を 1 つ求めなさい. 空白の部分には成分 0 が入っている. 単位行列を E で表すときは, E_r のようにサイズを記すこと.

$$P^{-1}\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}P = \begin{pmatrix}B & \\ & A\end{pmatrix}$$

(3) $A_1, \cdots, A_p$ をそれぞれ $k_1, \cdots, k_p$ 次の正方行列とし, $n = k_1 + \cdots + k_p$ とおく. $1, \cdots, p$ の置換 σ に対し, 次式をみたす n 次行列 Q を 1 つ求めなさい. 空白の部分には成分 0 が入っている. 単位行列を E で表すときは, E_r のようにサイズを記すこと.

$$Q^{-1}\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p\end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix}A_{\sigma(1)} & & & \\ & A_{\sigma(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{\sigma(p)}\end{pmatrix}$$

【答】 たとえば:

$$R = R^{-1} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdots & \\ \cdots & & \\ 1 & & \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} & E_m \\ E_n & \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} & E_n \\ E_m & \end{pmatrix}$$

Q をつくるには, たての n を上から順に $k_1, \cdots, k_p$ の大きさに分割, よこの n を左から順に $k_{\sigma(1)}, \cdots, k_{\sigma(p)}$ の大きさに分割して,

$$\begin{array}{ll}(\sigma(1),1)\text{ -ブロック成分に} & E_{k_{\sigma(1)}} \\ (\sigma(2),2)\text{ -ブロック成分に} & E_{k_{\sigma(2)}} \\ \vdots & \vdots \\ (\sigma(p),p)\text{ -ブロック成分に} & E_{k_{\sigma(p)}}\end{array}$$

をおくとよい．たとえば, A, B, C がそれぞれ a, b, c 次正方行列で $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ なら,

$$\begin{pmatrix} & E_b & \\ & & E_c \\ E_a & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & E_a \\ E_b & & \\ & E_c & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & & \\ & C & \\ & & A \end{pmatrix}.$$

3.1. $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V 上の線形変換 A の固有多項式 f_A と最小多項式 ϕ_A, および広義固有空間分解

$$f_A(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{n_j} \quad (\sum_{j=1}^{k} n_j = n = \dim V), \qquad \phi_A(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{m_j},$$
$$V = \widetilde{W}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_k), \qquad \widetilde{W}(\lambda_j) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_j I)^{n_j} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_j I)^{m_j}, \quad \dim \widetilde{W}(\lambda_j) = n_j$$

の状況のもとで考察を続ける．$A - \lambda_j I$ を不変部分空間 $\widetilde{W}(\lambda_j)$ に制限した線形変換がべき零なので, **2.2** から, $\widetilde{W}(\lambda_j)$ の適当な基底に関する表現行列が **2.3** の形, すなわち $\mathrm{diag}\big(J(0, j_1), J(0, j_2), \cdots, J(0, j_r)\big)$ のようなブロック対角型になる．ブロックの大きさが左上から単調非増加になるように順番を入れかえる (**2.3** の【問 1】参照). そのような行列の考察について次の宿題を出した.

【問 2】 (本問はジョルダン標準形の準備である．以下の問には答のみ記せばよい.)

(1) 各 $j \in \mathbb{N}$ に対し, 対角線の直上の成分だけに 1 が並んで他成分が 0 の j 次行列

$$J(0, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad J(0, 1) = (0)$$

を考える．$k \in \mathbb{N}$ に対し, $\dim \mathrm{Ker} J(0, j)^k$ を求めなさい. （答）$\min\{k, j\}$

(2) $m \in \mathbb{N}$, $p_1, \cdots, p_{m-1} \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, $p_m \in \mathbb{N}$ とし, 対角線上に左上から順に $J(0, m)$ が p_m 個, $J(0, m-1)$ が p_{m-1} 個, $\cdots$, $J(0, 1)$ が p_1 個並んだブロック対角型の n 次行列を C とする ($p_m \geqq 1$ であるが, $p_1, \cdots, p_{m-1}$ は 0 でもよい):

$$C = \begin{pmatrix} J(0,m) & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & J(0,m) & & & & & \\ & & & J(0,m-1) & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & J(0,m-1) & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad n = \sum_{j=1}^{m} j p_j.$$

C^k がどのような行列になるかを認識した上で,

$$\begin{pmatrix} \dim \mathrm{Ker}\ C \\ \vdots \\ \dim \mathrm{Ker}\ C^m \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{rank}\ C^0 \\ \mathrm{rank}\ C \\ \vdots \\ \mathrm{rank}\ C^{m-1} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$$

をみたす m 次行列 Q, R を求めなさい．さらに, $\det Q = \det R = 1$ であることを確認した後, Q^{-1}, R^{-1} を求めなさい.

（答）C^k の形を $k = 1, 2, \dots$ で追跡すればわかる.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 2 & & 2 & & 2 & 2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & k & & k & k \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & m-1 & m-1 \\ 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & m-1 & m \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & m \\ & 1 & 2 & 3 & \cdots & m-1 \\ & & 1 & 2 & \cdots & m-2 \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & 2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

1.10 から, $(A - \lambda_j I)|_{\widetilde{W}(\lambda_j)}$ のべき零指数が m_j であるので, 【問 2】(2) の m は今は m_j に等しい. 記号が煩雑にはなるが, 今は各 j に対して $(A - \lambda_j I)|_{\widetilde{W}(\lambda_j)}$ を考えているので, 行列 C に現れるデータに添字 j を明示しておこう. すなわち $(A - \lambda_j I)|_{\widetilde{W}(\lambda_j)}$ の表現行列が

$$C_j = \mathrm{diag}\Big(\underbrace{J(0, m_j), \cdots, J(0, m_j)}_{p^{(j)}_{m_j}}, \underbrace{J(0, m_j - 1), \cdots, J(0, m_j - 1)}_{p^{(j)}_{m_j-1}}, \cdots, \underbrace{J(0, 1), \cdots, J(0, 1)}_{p^{(j)}_1}\Big),$$

$$n_j = m_j p^{(j)}_{m_j} + (m_j - 1) p^{(j)}_{m_j-1} + \cdots + 2p^{(j)}_2 + p^{(j)}_1,$$

$$m_j \in \mathbb{N}, \quad p^{(j)}_{m_j} \in \mathbb{N}, \quad p^{(j)}_{m_j-1}, \cdots, p^{(j)}_1 \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

したがって $A|_{\widetilde{W}(\lambda_j)}$ の表現行列は

$$\lambda_j E_{n_j} + C_j$$

である.

3.2. n 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間上の線形変換 A のジョルダン標準形が

$$\begin{aligned} \mathrm{diag}\Big(& \underbrace{J(\lambda_1, m_1), \cdots, J(\lambda_1, m_1)}_{p^{(1)}_{m_1}}, \underbrace{J(\lambda_1, m_1 - 1), \cdots, J(\lambda_1, m_1 - 1)}_{p^{(1)}_{m_1-1}}, \cdots, \underbrace{J(\lambda_1, 1), \cdots, J(\lambda_1, 1)}_{p^{(1)}_1}, \\ & \cdots\cdots, \\ & \underbrace{J(\lambda_j, m_j), \cdots, J(\lambda_j, m_j)}_{p^{(j)}_{m_j}}, \underbrace{J(\lambda_j, m_j - 1), \cdots, J(\lambda_j, m_j - 1)}_{p^{(j)}_{m_j-1}}, \cdots, \underbrace{J(\lambda_j, 1), \cdots, J(\lambda_j, 1)}_{p^{(j)}_1}, \\ & \cdots\cdots, \\ & \underbrace{J(\lambda_k, m_k), \cdots, J(\lambda_k, m_k)}_{p^{(k)}_{m_k}}, \underbrace{J(\lambda_k, m_k - 1), \cdots, J(\lambda_k, m_k - 1)}_{p^{(k)}_{m_k-1}}, \cdots, \underbrace{J(\lambda_k, 1), \cdots, J(\lambda_k, 1)}_{p^{(k)}_1}\Big) \end{aligned}$$

と書けることが **3.1** でわかった. また【問 2】(2) から, 必要なデータ

$$p_1^{(1)}, \cdots, p_{m_1}^{(1)}, \ \cdots, \cdots, \ p_1^{(k)}, \cdots, p_{m_k}^{(k)} \tag{※}$$

は $(\dim \operatorname{Ker} C_j, \cdots, \dim \operatorname{Ker} C_j^{m_j})_{j=1}^{k}$ または $(\operatorname{rank} C_j^0, \cdots, \operatorname{rank} C_j^{m_j-1})_{j=1}^{k}$ から計算される. ここで,

$$\dim \operatorname{Ker} C_j^r = \dim \operatorname{Ker}((A - \lambda_j I)|_{\widetilde{W}(\lambda_j)})^r = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)^r, \qquad \forall r \in \mathbb{N}$$

が成り立つ. 第 1 の等号は C_j が $(A - \lambda_j I)|_{\widetilde{W}(\lambda_j)}$ の表現行列であることから当然であるが, 第 2 の等号も **1.4** からわかる. こうして, A のジョルダン標準形を書くのに必要なデータ (※) は

$$\bigl(\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)^r\bigr)_{j=1,\dots,k;\, r=1,\dots,m_j}$$

から【問 2】(2) を使って計算される. 特に,

- 固有値 λ_j に対するジョルダンブロックの個数 $\sum_{r=1}^{m_j} p_r^{(j)}$ は λ_j に属する固有空間の次元に一致
- 固有値 λ_j に対するジョルダンブロックの大きさの最大値は最小多項式における重複度 m_j に一致

等は, 具体的な計算の際に役に立つ.

4.1. ジョルダン標準形の演習問題は, 既刊書で必ずしも充実していないかもしれない (リサーチ不足!) が, たとえば [5], [1] 等参照. 前者の利点は戸松さんに教えてもらった. 後者は私が学生時代に使った.

【例】 [1] p.152 問題 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

少し手間だが $f_A(x) = (x-1)^4$. 固有値 1 に属する固有空間を計算すると 2 次元. $A - E \neq 0$, $(A-E)^2 = 0$ から最小多項式は $\phi_A(x) = (x-1)^2$. ジョルダンブロックの個数が 2, 最大サイズが 2 なので, A のジョルダン標準形 J は上記に決定. 変換行列を $P = (p_1\, p_2\, p_3\, p_4)$ とおくと, $AP = PJ$ を連立一次方程式にして

$$(A-E)p_1 = 0, \quad (A-E)p_3 = 0, \quad (A-E)p_2 = p_1, \quad (A-E)p_4 = p_3.$$

後の 2 つから前の 2 つがしたがう. また, この式で, p_1 と p_3 が 1 次独立ならば p_1, p_2, p_3, p_4 が 1 次独立になる (**2.2** の証明の冒頭で用いたロジック). $A - E$ の列ベクトルで 1 次独立なもの, たとえば p_1, p_3 を第 1, 4 列にとろう. ということは $p_2 = e_1, p_4 = e_4$.

参考文献

[1] 有馬哲, 浅枝陽, 演習詳解線型代数, 東京図書, 1976.

[2] 笠原晧司, 微分方程式の基礎, 数理科学ライブラリー 5, 朝倉書店, 1982.

[3] 笠原晧司, 行列の構造, 現代応用数学の基礎, 日本評論社, 1994.

[4] 西田吾郎, 線形代数学, 京都大学学術出版会, 2009.

[5] 齋藤正彦, 線型代数演習, 基礎数学 4, 東京大学出版会, 1985.

[6] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1974.

[7] 高木貞治, 代数学講義, 1965.