2009 前期

確率論 I（４年）・確率論概論 I（大学院）　講義メモ

洞　彰人　（大学院多元数理科学研究科）

PART I　積分論続論

1　可測関数列の収束の階層

***Definition* 1.1**　可算 (完全, σ-) 加法族, 部分可算加法族, 可測空間, 測度空間, Borel(ボレル) 集合族, 有界測度, 準 (σ-) 有界測度

▶ $(M, \mathcal{F}, \mu)$： 測度空間,　$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$： Borel 可測空間

***Definition* 1.2**　可測関数列の概収束 (μ-a.e.), 測度収束 (in μ), 平均収束 (in $L^1(\mu)$).

Theorem 1.3 (Lebesgue の収束定理)　$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-a.e. かつ

$$\exists g \in L^1(\mu) \quad \text{such that} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in M,\ |f_n(x)| \leqq g(x) \qquad (\text{一様可積分}) \tag{1.1}$$

ならば, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^1(\mu)$.

Proposition 1.4　μ が有界測度のとき, 可測関数列が概収束すれば測度収束.

***Example* 1.5**　μ が有界測度でないときの Proposition 1.4 の反例. つまり, 概収束するが測度収束しない例.

***Example* 1.6**　Proposition 1.4 の逆の反例. つまり, 測度収束するが概収束しない例.

Proposition 1.7　可測関数列が平均収束すれば測度収束.

Proposition 1.8 (Borel–Cantelli の補題)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \quad \text{ならば} \quad \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0.$$

Proposition 1.9　可測関数列が測度収束すれば, 概収束する部分列が存在.

Lemma 1.10　位相空間内の点列 $\{x_n\}$ が x に収束するための必要十分条件は, $\{x_n\}$ の任意の部分列 $\{x_{n_k}\}$ に対して x に収束するそのまた部分列 $\{x_{n_{k_l}}\}$ が存在すること.

Proposition 1.11 (Lebesgue の収束定理)　Theorem 1.3 で, μ-a.e. を in μ に替えても OK.

Proposition 1.12　μ が有界測度のとき, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in μ かつ (1.1) より弱い一様可積分性

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{x\in M \,|\, |f_n(x)|>a\}} |f_n(x)|\mu(dx) = 0 \tag{1.2}$$

が成り立てば, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^1(\mu)$.

***Definition* 1.13** μ が有界測度のとき, 測度収束の位相を記述する距離空間 $L^0(M, \mathcal{F}, \mu)$:

$$d(f, g) = \int_M \phi(|f(x) - g(x)|)\mu(dx)$$

(ϕ は $\mathbb{R}_{\geqq 0}$ 上で有界連続非減少, 0 の近傍で真に増加, $\phi(0) = 0$, $\phi(x)/x$ が $\mathbb{R}_{\geqq 0}$ 上で非増加).

Proposition 1.14 (1) d は距離. (2) 可測関数列について, 距離 d に関する収束 $\Longleftrightarrow$ 測度収束.

***Remark* 1.15** 可測関数列の概収束は何らかの位相に関する収束ではない.

2 Hahn 分解, Jordan 分解

***Definition* 2.1** 実測度 ($\mathbb{R}$-値測度, 符号つき測度)

Theorem 2.2 (実測度に関する Hahn 分解) 可測空間 $(M, \mathcal{F})$ 上の実測度 Φ に対し,

- $\Phi(A \cap P) \geqq 0, \quad A \in \mathcal{F}$ (P が Φ に関する正値集合)
- $\Phi(A \cap P^c) \leqq 0, \quad A \in \mathcal{F}$ (P^c が Φ に関する負値集合).

をみたす $P \in \mathcal{F}$ が存在. $M = P \sqcup P^c$ を Φ に関する M の Hahn 分解という.

▶ $|\Phi|(A) = \sup\left\{\sum_i |\Phi(A_i)| \;\middle|\; A = \bigsqcup_i A_i \text{ (有限和) }\right\}, \quad A \in \mathcal{F}$

Lemma 2.3 実測度 Φ に関する Hahn 分解 $M = P \sqcup P^c$ において

(1) $|\Phi|(A) = \Phi(A \cap P) - \Phi(A \cap P^c), \quad A \in \mathcal{F}$.

(2) $|\Phi|$ は有界測度で, $|\Phi(A)| \leqq |\Phi|(A), \quad A \in \mathcal{F}$. $|\Phi|$ は Φ の全変動と呼ばれる.

Proposition 2.4 (Hahn 分解の一意性) 実測度 Φ に関する M の Hahn 分解において

$$M = P_1 \sqcup P_1^c = P_2 \sqcup P_2^c \quad \Longrightarrow \quad |\Phi|(P_1 \triangle P_2) = |\Phi|(P_1^c \triangle P_2^c) = 0.$$

ただし, $\triangle$ は集合の対称差: $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.

Proposition 2.5 実測度は最大値・最小値をもつ:

$$\Phi(P) = \sup\{\Phi(A) \,|\, A \in \mathcal{F}\}, \quad \Phi(P^c) = \inf\{\Phi(A) \,|\, A \in \mathcal{F}\}.$$

***Definition* 2.6 (実測度の Jordan 分解)** 実測度 Φ に関する Hahn 分解 $P \sqcup P^c$ のもとで

$$\Phi^+(B) = \Phi(B \cap P), \quad \Phi^-(B) = -\Phi(B \cap P^c), \qquad B \in \mathcal{F}$$

とおくと, Φ^+, Φ^- は有界測度であり, $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$, $|\Phi| = \Phi^+ + \Phi^-$.

Proposition 2.7 (Jordan 分解の一意性) 実測度 Φ に関する Hahn 分解 $M = P_1 \sqcup P_1^c = P_2 \sqcup P_2^c$ に応じて $\Phi = \Phi_1^+ - \Phi_1^- = \Phi_2^+ - \Phi_2^-$ とすると, $\Phi_1^+ = \Phi_2^+$, $\Phi_1^- = \Phi_2^-$.

3　Radon–Nikodym の定理

***Definition* 3.1** 測度の絶対連続性 ($\nu \lesssim \mu$), 特異性 ($\nu \perp \mu$), 同値性 ($\nu \sim \mu$). 実測度 Φ と測度 μ の絶対連続性 ($\Phi \lesssim \mu$).

Lemma 3.2　測度 μ に関する測度 ν の分解

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \qquad \text{where} \qquad \nu_1 \lesssim \mu, \quad \nu_2 \perp \mu \tag{3.1}$$

は存在すれば一意的.

Lemma 3.3　任意の準有界測度 ν に対し, ν と同値な有界測度 ν' が存在.

Proposition 3.4　ν が準有界ならば, ν の分解 (3.1) が存在.

Lemma 3.5　測度 μ と非負値可測関数 f に対して

$$\nu(B) = \int_B f(x)\mu(dx), \qquad B \in \mathcal{F}$$

とおくと, ν は測度で $\nu \lesssim \mu$ (このとき $\nu(dx) = f(x)\mu(dx)$ または $\nu = f\mu$ と略記). さらに結合法則が成立する: $(gf)\mu = g(f\mu)$.

Theorem 3.6 (Radon–Nikodym の定理)　測度 μ, ν がともに準有界で絶対連続性 $\nu \lesssim \mu$ が成り立てば,

$$\nu(B) = \int_B f(x)\mu(dx), \qquad B \in \mathcal{F}$$

をみたす非負値可測関数 f が μ-a.e. に一意的に存在. この f を Radon–Nikodym 導関数 (または密度) という.

Lemma 3.7　実測度 Φ の Jordan 分解 $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ において, $\Phi \lesssim \mu$ ならば $\Phi^+ \lesssim \mu$ かつ $\Phi^- \lesssim \mu$.

Theorem 3.8　実測度 Φ と準有界測度 μ についても $\Phi \lesssim \mu$ ならば Radon–Nikodym の定理が成り立ち, Radon–Nikodym 導関数 $\in L^1(\mu; \mathbb{R})$.

***Example* 3.9**　Radon–Nikodym の定理で準有界性の仮定をはずした場合の反例の考察. 極端な場合として, 個数測度や 0 と ∞ しか値をとらない測度などを考えてみるとよい.

***Remark* 3.10** この節の結果の多くは「最大法」(かくかくしかじかの性質をみたす最大の可測集合や可測関数の存在を確認すること) によって示される.

***Remark* 3.11**　Radon–Nikodym の定理が登場する例

- 実測度全体のなす空間の完備性
- L^p の双対空間を関数空間として実現 ($1 \leqq p < \infty$)
- Lebesgue 積分版の微積分の基本定理
- 条件つき平均の定義
- $\cdots$

4 Riesz–Markov の表現定理

***Definition* 4.1** 位相空間 E の Borel 集合族を $\mathcal{B}(E)$ とするとき, 可測空間 $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の測度を E 上の Borel 測度という. E 上の関数 f のサポート : $\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in E \,|\, f(x) \neq 0\}}$.

– $C(E) = C(E; \mathbb{C})$: E 上の $\mathbb{C}$-値連続関数全体, $C(E; \mathbb{R})$: E 上の $\mathbb{R}$-値連続関数全体,

– $C_c(E) = \{f \in C(E) \,|\, \mathrm{supp} f$ がコンパクト $\}$, $C_c(E; \mathbb{R}) = \{f \in C(E; \mathbb{R}) \,|\, \mathrm{supp} f$ がコンパクト $\}$.

$C(E)$(または $C(E; \mathbb{R})$) 上の汎関数 ψ について

- 線形: $\psi(\alpha f + \beta g) = \alpha\psi(f) + \beta\psi(g)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (または $\mathbb{R}$),
- 正値: $f \geqq 0 \implies \psi(f) \geqq 0$.

***Definition* 4.2** 位相空間 E 上の測度 μ が正則であるとは, 次の 2 条件をみたすこと

- 内正則性 : 任意の開集合 O に対して, $\mu(O) = \sup\{\mu(K) \,|\, K \subset O, K$ はコンパクト集合 $\}$
- 外正則性 : 任意の Borel 集合 B に対して, $\mu(B) = \inf\{\mu(O) \,|\, O \supset B, O$ は開集合 $\}$.

コンパクト集合には有限値を与える正則な Borel 測度を Radon 測度と呼ぶ.

Lemma 4.3 コンパクト距離空間 K 上の有界 Borel 測度は必然的に正則, したがって有界 Radon 測度.

Lemma 4.4 (距離空間における Urysohn の補題) 交わらない閉集合 F_0, F_1 に対し, F_0 上で $f \equiv 0$, F_1 上で $f \equiv 1$, 全体で $0 \leqq f \leqq 1$ となる連続関数 f が存在.

Theorem 4.5 (Riesz–Markov の表現定理) K をコンパクト距離空間とする. $C(K; \mathbb{R})$ 上の正値線形汎関数 ψ と K 上の有界 Borel 測度 μ とは, 次の関係によって全単射的に対応する:

$$\psi(f) = \int_K f(x)\mu(dx), \qquad f \in C(K; \mathbb{R}). \tag{4.1}$$

***Remark* 4.6** 土台の空間がコンパクトでない場合や距離づけ可能でない場合は, もっと事情が複雑になる.

Theorem 4.7 (Riesz–Markov の表現定理) $C_c(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ 上の正値線形汎関数 ψ と $\mathbb{R}$ 上の Radon 測度 μ とは全単射的に対応する:

$$\psi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx), \qquad f \in C_c(\mathbb{R}; \mathbb{R}). \tag{4.2}$$

***Remark* 4.8** 集合 M 上に測度を構成する一般的な手段

♣ Carathéodory の外測度を使う方法: $A \in 2^M$ (M の部分集合全体) $\longmapsto$ $\nu(A) \in [0, \infty]$ が

– $\nu(\varnothing) = 0$

– 単調性 $A_1 \subset A_2 \implies \nu(A_1) \leqq \nu(A_2)$

– 可算劣加法性 $\nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$

をみたせば, ν に関して可測な集合全体 $\mathcal{B}$ は可算加法族であり, ν を $\mathcal{B}$ 上に制限すれば測度になる.

(定義 : $B \in \mathcal{B} \iff \forall A \subset M,\ \nu(B \cap A) + \nu(B^c \cap A) = \nu(A)$)

♣ Hopf の拡張定理:

M の有限加法族 $\mathcal{A}$ 上の有限加法的有界測度 μ が $\mathcal{A}$ を含む最小の可算加法族 $\mathcal{B}$ 上の有界測度 $\tilde{\mu}$ に拡張可能 $\iff$ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$ なる $\mathcal{A}$ の任意の非増加列 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ に対して $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$ が成立.

このとき拡張は一意的. さらに, $\mathcal{B}$ の距離 $d(B_1, B_2) = \tilde{\mu}(B_1 \triangle B_2)$ に関して $\mathcal{A}$ は稠密.

5　関数空間 L^p, $C(K)$

▶ $L^p(M,\mathcal{F},\mu) = L^p(\mu) = \{f \in L^0(M,\mathcal{F},\mu) \mid \|f\|_p = \left(\int_M |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} < \infty\}$,　　$0 < p < \infty$

$L^\infty(M,\mathcal{F},\mu) = L^\infty(\mu) = \{f \in L^0(M,\mathcal{F},\mu) \mid \|f\|_\infty = \operatorname*{ess.\,sup}_{x\in M} |f(x)|\}$　(ただし ess. sup は本質的上限).

Theorem 5.1 (Hölder の不等式, Minkowski の不等式)

$$\int_M |f(x)g(x)|\mu(dx) \leqq \left(\int_M |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \left(\int_M |g(x)|^q \mu(dx)\right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1<p<\infty$$
$$\left(\int_M |f(x)+g(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \leqq \left(\int_M |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} + \left(\int_M |g(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p}, \quad 1 \leqq p < \infty.$$

Theorem 5.2　$L^p(\mu)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$, $C(K)$ が複素 Banach 空間.　$L^p(\mu;\mathbb{R})$, $C(K;\mathbb{R})$ が実 Banach 空間.

Corollary 5.3　可測空間 $(M,\mathcal{F})$ 上の実測度全体は, 全変動ノルム $\|\Phi\| = |\Phi|(M)$ に関して実 Banach 空間.

6　Fourier 変換

***Definition* 6.1**　$L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{R}),\text{Lebesgue 測度})$ での Fourier 変換と畳み込み (convolution)

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi x} f(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}; \qquad (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ただし $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測集合全体 ＝ Lebesgue 測度による Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の完備化.
Schwartz の急減少関数の空間：$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^p |f^{(n)}(x)| < \infty,\ p \geqq 0,\ n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}\}$.

Lemma 6.2　$f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ならば,　$f*g \in L^1(\mathbb{R})$;　$\widehat{f*g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Lemma 6.3　$t > 0$ に対して $p_t(x) = (2\pi t)^{-1/2}\exp(-x^2/2t)$ とおく.
(1) $p_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,　$\widehat{p_t}(\xi) = \exp(-2\pi^2 t\xi^2)$.
(2) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $1 \leqq p \leqq \infty$ に対し,　$\lim_{t\to 0} p_t * f = f$ in L^p.

Theorem 6.4　(1) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(2)（等長性）　$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi.$$

(3) (反転公式)　$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し, $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であって

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi x}\widehat{f}(\xi)d\xi.$$

***Remark* 6.5**　Fourier 変換の定義の仕方の変更に伴ういろいろな等式・不等式での係数の変化に注意.

レポート問題１

問題 [**1**] 可測空間 $(M, \mathcal{F})$ 上の実測度 Φ の Jordan 分解 $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ において,

$$\Phi^+(A) + \Phi^-(A) = \sup\Big\{\sum_i |\Phi(A_i)| \;\Big|\; A = \bigsqcup_i A_i \text{ (有限分割)}\Big\}, \qquad A \in \mathcal{F}$$

が成り立つことを示しなさい.

問題 [**2**] コンパクト距離空間 K 上の有界 Borel 測度 μ に対し,

$$\mathcal{A} = \big\{B \in \mathcal{B}(K) \,\big|\, \forall\epsilon > 0,\ \exists C: \text{コンパクト } \subset B,\ \mu(B) - \mu(C) < \epsilon\big\},$$

および $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{A} \,|\, B^c \in \mathcal{A}\}$ とおく. ただし, $\mathcal{B}(K)$ は K の Borel 集合族.

(1) $\mathcal{B}$ が可算加法族であることを示しなさい.

(2) $\mathcal{B} = \mathcal{B}(K)$ を示しなさい.

問題 [**3**] $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (Schwartz の急減少関数の空間) とすると,

$$\lim_{t\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|(p_t * f)(x) - f(x)\big| = 0$$

が成り立つことを示しなさい. ただし, $t > 0$ に対して

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

とする.

▶ **注 意**　提出は講義時に限定 (レポート提出ボックスは設けません). 提出期限は６月１６日 (火) です.

PART II　確率論入門

7　基本用語

Definition 7.1

• 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

• 確率変数 $X : \Omega \longrightarrow S$,　ただし $(S, \mathcal{S})$ は可測空間.

• 確率変数 $X : \Omega \longrightarrow S$ による P の像測度 $X_* P = P^X$ を X の分布という.

• 実確率変数 $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ の分布関数 $F(x) = P^X((-\infty, x]) = P(X \leqq x)$

• 実確率変数 $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ の分布 P^X が Lebesgue 測度に関して絶対連続のとき, その Radon–Nikodym 導関数 f_X を X の密度関数という.

• 確率変数 $X, Y : \Omega \longrightarrow S$ の結合分布（同時分布）$(X, Y)_* P = P^{(X,Y)}$ ($S \times S$ 上の確率測度).

• 実確率変数 $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ の平均（期待値）$E[X]$:

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x P^X(dx).$$

ただし, X が可積分 ($E[|X|] < \infty$) のとき.

Theorem 7.2 (変数変換, 置換積分)　確率変数 $X : \Omega \longrightarrow S$, 可測関数 $f : S \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqq 0}$ に対して

$$E[f(X)] = \int_S f(x) P^X(dx).$$

***Remark* 7.3**　適当な可積分条件のもと, f は $\mathbb{C}$-値関数に拡張される.

8　分布族の位相, Prokhorov の定理

***Definition* 8.1**　距離空間における用語の復習：　コンパクト, 相対コンパクト, 全有界, 完備, 可分, $\cdots$

Lemma 8.2　$\mathbb{R}$ は通常の距離に関して全有界でないが, 位相を変えずに全有界にするような $\mathbb{R}$ 上の距離がある. 一般に, (S,d) が可分距離空間ならば, $(S,\tilde{d})$ が全有界で (S,d) と同相になる距離 $\tilde{d}$ が存在する.

Lemma 8.3 (1 の分割)　距離空間 S の有限開被覆 $S = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ に対して, 次をみたす連続関数列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in C(S)$ が存在する.

(i) $0 \leqq \varphi_k(x) \leqq 1, \quad \mathrm{supp}\varphi_k \subset U_k \quad (k = 1, \ldots, n)$,

(ii) $\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_n(x) = 1 \quad (x \in S)$.

Lemma 8.4　K がコンパクト距離空間ならば, Banach 空間 $C(K)$ は可分.

***Example* 8.5**　数列空間 ℓ^∞ は sup-ノルムに関して可分でない.

***Definition* 8.6**　距離空間上の確率測度の列の弱収束.

Theorem 8.7　K がコンパクト距離空間ならば, $(K, \mathcal{B}(K))$ 上の確率測度全体 $\mathcal{P}(K)$ は弱収束の位相でコンパクト距離空間になる.

Theorem 8.8 (確率測度の弱収束の特徴づけ)　$\mathbb{R}$ 上の有界連続関数全体, 一様連続関数全体をそれぞれ $C_b(\mathbb{R})$, $C_u(\mathbb{R})$ で表す. $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ に対して次は同値.

(i) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx), \qquad f \in C_b(\mathbb{R})$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx), \qquad f \in C_b(\mathbb{R}) \cap C_u(\mathbb{R})$.

(iii) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqq \mu(F), \qquad F$: $\mathbb{R}$ の閉集合.

(iv) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(O) \geqq \mu(O), \qquad O$: $\mathbb{R}$ の開集合.

(v) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mu(\partial B) = 0$.

(vi) $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \qquad x \in \mathbb{R}$: F の連続点.　ただし, F_n, F はそれぞれ μ_n, μ の分布関数.

***Remark* 8.9**　Theorem 8.8 において, (ii) 以外の条件は $\mathbb{R}$ に入れる距離によらない (同相であれば). (ii) の一様連続性の概念は距離に依存するが, この定理では同相であればどんな距離を入れても OK.

***Definition* 8.10**　実確率変数列の収束の階層：　概収束, 平均収束, 確率収束, 法則収束.

Corollary 8.11　実確率変数列について, 確率収束 $\Longrightarrow$ 法則収束.

***Example* 8.12**　実数列 $\{x_n\}$ が x に収束すれば, デルタ測度 δ_{x_n} が δ_x に弱収束する. この例により, Theorem 8.8 において (iii), (iv) で真に不等号になる場合を確認せよ.

***Definition* 8.13**　距離空間 S の完備化 $\widehat{S}$, コンパクト化.

***Remark* 8.14**　$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ における弱収束を記述する距離. $\mathbb{R}$ を全有界にする距離 $\tilde{d}$ に関する完備化 $(\widehat{\mathbb{R}}, \tilde{d})$ はコ

ンパクト. Lemma 8.4 によって $C_u(\mathbb{R},\tilde{d}) \cong C(\widehat{\mathbb{R}},\tilde{d})$ の稠密可算部分集合 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がとれ,

$$\tau(\mu,\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\Big(\Big|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mu(dx) - \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\nu(dx)\Big| \wedge 1\Big), \qquad \mu,\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

とおくと, Theorem 8.8 により, 距離 τ に関する収束と弱収束とが同値.

Theorem 8.15 (Prokhorov の定理) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathcal{Q}$ に対する次の 2 つの条件は同値.
(C) $\mathcal{Q}$ が $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ で相対コンパクト.
(T) $\mathcal{Q}$ が**緊密 (tight)**, すなわち $\forall\epsilon > 0,\quad \exists C$: $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合, $\forall\mu \in \mathcal{Q},\quad \mu(C) \geqq 1-\epsilon.$

***Remark* 8.16** Brown 運動の構成において, $\mathbb{R}$ のかわりに $C([0,\infty);\mathbb{R})$ のときに Prokhorov の定理が適用される. 次節の Remark 9.6 も参照.

9 特性関数

***Definition* 9.1** $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ に対し

$$\varphi_\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\mu(dx), \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

を μ の特性関数と言い, $\varphi_X(\xi) = \varphi_{P^X}(\xi) = E[e^{i\xi X}]$ を実確率変数 X の特性関数と言う.

Lemma 9.2 $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ が原点において連続で正定値, すなわち

$$\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j\overline{\alpha_k}\,\varphi(\xi_j-\xi_k) \geqq 0, \qquad n\in\mathbb{N},\ \alpha_j \in \mathbb{C},\ \xi_j \in \mathbb{R}$$

をみたせば, φ は $|\varphi(\xi)| \leqq \varphi(0)$ をみたし, かつ一様連続.

Proposition 9.3 (特性関数の性質) $\mu,\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ について
(1) φ_μ は連続, 正定値, $\varphi_\mu(0) = 1,\ |\varphi_\mu(\xi)| \leqq 1\ \ (\xi \in \mathbb{R})$.
(2) $\varphi_{\mu*\nu} = \varphi_\mu\varphi_\nu$, すなわち確率変数 X, Y が独立ならば $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$.
(3) $\varphi_\mu = \varphi_\nu$ ならば $\mu = \nu$.
(4) $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ で μ_n が μ に弱収束すれば, φ_{μ_n} が φ_μ に各点収束.

Proposition 9.4 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \ t > 0$ に対して

$$\mu\big(\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x| \geqq \frac{2}{t}\}\big) \leqq \frac{1}{t}\int_{-t}^{t}(1-\varphi_\mu(\xi))d\xi.$$

Theorem 9.5 (Lévy の連続性定理) $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ に対して特性関数 φ_{μ_n} が原点で連続な関数 φ に各点収束すれば

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n = \mu\ (\text{弱収束}), \qquad \varphi_\mu = \varphi$$

をみたす $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ が一意的に存在する.

***Remark* 9.6** Prokhorov の定理を $S = \mathbb{R}$ で適用. 一般に, 点列の収束を示すのに

- 相対コンパクト性
- 集積点の一意性

の 2 つをチェックする方法は汎用的である. 距離空間 S における点列が相対コンパクトで集積点が高々 1 つしかなければ S の点に収束するという事実による.

Corollary 9.7 (Glivenko の定理) $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ で φ_{μ_n} が φ_μ に各点収束すれば, μ_n が μ に弱収束.

Lemma 9.8 $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ が連続正定値かつ $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ ならば, $\widehat{\varphi}(x) \geqq 0$ $(x \in \mathbb{R})$ かつ $\|\widehat{\varphi}\|_{L^1} = \varphi(0)$.

Theorem 9.9 (Bochner の定理) $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ が連続正定値かつ $\varphi(0) = 1$ ならば,

$$\varphi(\xi) = \varphi_\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\mu(dx), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

をみたす $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ が一意的に存在する.

***Remark* 9.10** 正規分布 $\nu_t(dx) = p_t(x)dx$ との畳み込みに相当すべき確率測度を捉える. $t \searrow 0$ のときに ν_t が δ_0 に弱収束することを用い, Lévy の連続性定理に持ち込む.

***Definition* 9.11** この節の以上の結果は, $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度についてもそのまま成り立つ. $m \in \mathbb{R}^d$ と $d \times d$ 正定値実対称行列 C に対し, $\varphi_{m,C} = \exp(im \cdot \xi - \frac{1}{2}\xi \cdot C\xi)$ を特性関数にもつ $\mu = N(m, C) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ を d 次元正規分布 (または Gauss 分布) と言う. C は必ずしも可逆行列でなくてよい.

***Example* 9.12** (1) C が可逆ならば $N(m, C)$ は次の密度関数をもつ:

$$(2\pi)^{-d/2}(\det C)^{-1/2}\, e^{-\frac{1}{2}(x-m)\cdot C^{-1}(x-m)}.$$

(2) $N(m, C)$ の平均ベクトルは m, 共分散行列は C.
(3) C が可逆でないとき, $N(m, C)$ の台は?

問 題

2009.6.30.

[**問題** 1] 可測空間 M に値をとる確率変数 X と M 上の非負値可測関数 f に対して

$$E[f(X)] = \int_M f(x)P^X(dx)$$

が成り立つことを示しなさい.

[**問題** 2] 非負値確率変数 Z に対して

$$E[Z] = \int_0^\infty P(Z > t)dt$$

が成り立つことを示しなさい.

10　独立確率変数列と無限直積測度

***Definition* 10.1** 可測空間の (無限) 直積、準有界測度の直積

***Definition* 10.2** 独立性（事象, 部分可算加法族, 確率変数）

Theorem 10.3　2 つの実確率変数 X, Y について次は同値.

(i) X, Y が独立

(ii) $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)] \qquad (\forall f, g \in C_b(\mathbb{R}))$

(iii) $E[e^{i(sX+tY)}] = E[e^{isX}]E[e^{itY}] \qquad (\forall s, t \in \mathbb{R})$

(iv) $P^{(X,Y)} = P^X \times P^Y$

Theorem 10.4 確率測度の無限直積が一意的に存在する.

***Remark* 10.5**　確率的な性質を論じる上で, 次の 2 つの設定は等価である:

- 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 可測空間 $(S, \mathcal{S})$, S-値確率変数列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}$ の部分可算加法族 $\mathcal{G} = \sigma[X_n \,|\, n \in \mathbb{N}]$,
- 直積可測空間 $(S^\infty, \mathcal{S}^\infty)$ 上の確率測度 μ, 第 n 成分への射影 $X_n : S^\infty \longrightarrow S$ の列.

Theorem 10.6 (Dynkin 族定理)　集合 Ω の部分集合族 $\mathcal{P}$ が乗法族, すなわち

(P1) $\Omega \in \mathcal{P}$

(P2) $A, B \in \mathcal{P} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$

であり, $\mathcal{P}$ を含む部分集合族 $\mathcal{D}$ が Dynkin 族, すなわち

(D1) $\Omega \in \mathcal{D}$

(D2) $A, B \in \mathcal{D}, A \subset B \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$

(D3) $A_n \in \mathcal{D}\ (n \in \mathbb{N}), A_n \nearrow A \Longrightarrow A \in \mathcal{D}$

をみたせば, $\sigma[\mathcal{P}] \subset \mathcal{D}$. したがって, 乗法族 $\mathcal{P}$ を含む最小の Dynkin 族 $\delta[\mathcal{P}]$ は $\sigma[\mathcal{P}]$ に一致する.

Theorem 10.7 (Borel–Cantelli の (第 2) 補題)　$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が独立な事象列のとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \quad \Longrightarrow \quad P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = P\big(A_k \text{ i.o. }\big) = 1.$$

***Definition* 10.8**　確率変数列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に付随する $\sigma[X_1, X_2, \cdots]$ の 2 つの部分可算加法族

- 末尾事象 (tail event) の族：$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma[X_n, X_{n+1}, \cdots] =$ 任意有限個の $X_1, \cdots, X_n$ に依存しない事象全体.
- 入れかえ可能な事象 (exchangeable event) の族：$\mathcal{E} =$ 任意有限個の $X_1, \cdots, X_n$ の置換に関して不変な事象全体.

***Remark* 10.9**　$\mathcal{T} \subset \mathcal{E}$ が成立. $\mathcal{E} \setminus \mathcal{T}$ に属する事象の例をつくるには, $X_1 + \cdots + X_n$ の極限値を考えるとよい.

Theorem 10.10 (Kolmogorov の 0-1 法則)　$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が独立のとき, $A \in \mathcal{T} \Longrightarrow P(A) = 0$ or 1.

Theorem 10.11 (Hewitt–Savage の 0-1 法則)　$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が独立のとき, $A \in \mathcal{E} \Longrightarrow P(A) = 0$ or 1.

Theorem 10.12 (角谷の二分律 (dichotomy)) 可測空間 $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ 上の 2 つの同値な確率測度 $\mu_n \sim \nu_n$ の無限直積をそれぞれ $\mu = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n, \nu = \prod_{n=1}^{\infty} \nu_n$ とするとき, $\mu \sim \nu$ または $\mu \perp \nu$ のどちらかが成り立ち,

$$\mu \sim \nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \int_{\Omega_n} \sqrt{\frac{d\nu_n}{d\mu_n}} d\mu_n \Big) < \infty.$$

11 独立確率変数列の和に対する極限定理

▶ 本節では, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の**独立な**実確率変数とし, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおく.

Proposition 11.1 S_n は a.s. に収束するか a.s. に収束しないかのどちらかである. すなわち, S_n が収束する確率は 1 または 0.

Theorem 11.2 (Kolmogorov の不等式) $E[X_n] = 0$, $V(X_n) < \infty$ とすれば,

$$P\big(\max_{k=1,\ldots n} |S_k| \geqq a \big) \leqq \frac{1}{a^2} V(S_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall a > 0.$$

Theorem 11.3 (Kolmogorov の大数の強法則: strong Law of Large Numbers)
(I) $\{X_n\}$ が同分布で $E[|X_1|] < \infty$, または (II) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} V(X_n) < \infty$ ならば,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n - E[S_n]}{n} = 0 \quad \text{a.s.}$$

Remark **11.4** $\{X_n\}$ が同分布で $E[X_1^4] < \infty$ をみたせば, 簡単な個数の処理と Borel–Cantelli の補題によって大数の強法則が示される.

Remark **11.5** 確率収束を主張する大数の弱 (weak) 法則は, 分散の評価と Chebyshev の不等式から直ちに示される.

Theorem 11.6 (中心極限定理: Central Limit Theorem)
$\{X_n\}$ が同分布で $m = E[X_1]$, $v = V(X_1)$ をもてば,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{n}} = Z \quad (\text{法則収束}).$$

ここで, Z は平均 0 分散 v の正規分布 $N(0, v)$ にしたがう確率変数.

レポート問題２

問題 [**1**] 実確率変数列が確率収束すれば法則収束すること (Corollary 8.11) を示しなさい.

問題 [**2**] 1 次元単純ランダムウォーク ($P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = 1/2$) に対し, 特性関数を計算することによって Theorem 11.6(中心極限定理) 示しなさい.

問題 [**3**] $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}$ 上の確率測度の列, μ が $\mathbb{R}$ 上の測度とし,

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}), \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx)$$

が成り立つとする (このとき, μ_n が μ に漠収束するという).

(1) $\mu(\mathbb{R}) \leqq 1$ を示しなさい.

(2) $\mu(\mathbb{R}) < 1$ となる μ_n, μ の例を挙げなさい.

(3) $\mu(\mathbb{R}) = 1$ ならば, μ_n が μ に弱収束することを示しなさい.

▶ **注 意**　提出期限は７月３１日 (金) 午後１時です (レポート提出ボックスを設けます).