2008 後期

確率論 IV（４年）・確率論概論 IV（大学院）　メモ

洞　彰人　（大学院多元数理科学研究科）

PART I　測度論と確率論の基礎事項

1　基本用語

***Definition* 1.1**　σ-加法族, 部分 σ-加法族, 可測空間, 測度空間, 確率空間, 確率変数, 平均（期待値）, 像測度, 分布, 分布関数, 密度関数, 結合分布（同時分布）

Proposition 1.2 (変数変換, 置換積分)　確率変数 $X : \Omega \longrightarrow S$, 可測関数 $f : S \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqq 0}$ に対して

$$E[f(X)] = \int_S f(x) P^X(dx).$$

***Definition* 1.3** 可測空間の直積、準有界測度の直積

Theorem 1.4 確率測度の無限直積が一意的に存在.

***Definition* 1.5** 独立性（事象, 部分 σ-加法族, 確率変数）

Theorem 1.6　TFAE

(i) 実確率変数 X, Y が独立

(ii) $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)] \qquad (\forall f, g \in C_b(\mathbb{R}))$

(iii) $E[e^{i(sX+tY)}] = E[e^{isX}]E[e^{itY}] \qquad (\forall s, t \in \mathbb{R})$

(iv) $P^{(X,Y)} = P^X \times P^Y$

Exercise 1.1　Proposition 1.2 の証明.

2　Radon–Nikodym の定理と条件つき平均（期待値）

***Definition* 2.1** 測度の絶対連続性と特異性, 実測度

Lemma 2.2　測度 μ に関する測度 ν の分解

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \qquad \text{where} \qquad \nu_1 \lesssim \mu, \quad \nu_2 \perp \mu \tag{2.1}$$

は存在すれば一意的.

Proposition 2.3　ν が準有界ならば, ν の分解 (2.1) が存在.

Theorem 2.4 (Radon–Nikodym の定理)　測度 μ, ν がともに準有界で絶対連続性 $\nu \lesssim \mu$ が成り立てば, $\nu(dx) = f(x)\mu(dx)$ をみたす Radon–Nikodym derivative $f(= d\nu/d\mu)$ が μ-a.s. に一意的に存在.

Proposition 2.5 実測度 Φ は有界測度の差に分解される: $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$. このとき $\Phi \lesssim \mu$ ならば, $\Phi_1 \lesssim \mu$ かつ $\Phi_2 \lesssim \mu$.

Theorem 2.6 実測度 Φ と準有界測度 μ についても $\Phi \lesssim \mu$ ならば Radon–Nikodym の定理が成り立ち, $f = d\Phi/d\mu \in L^1(\mu)$.

***Remark* 2.7** この節の結果の多くは「最大法」(かくかくしかじかの性質をみたす最大の可測集合や可測関数の存在を確認すること)によって示される.

Exercise 2.1 Radon–Nikodym の定理で準有界性の仮定をはずした場合の反例の考察.

***Example* 2.8** Ω の有限分割から生成される部分 σ-加法族

Lemma 2.9 Ω の可算分割から生成される部分 σ-加法族 $\mathcal{G} = \sigma[A_1, A_2, \cdots]$ と $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対し,

$$E[X|\mathcal{G}](\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{P(A_n)} E[X : A_n] \Big) 1_{A_n}(\omega)$$

とおく (ただし $E[X : A] = E[X 1_A] = \int_A X dP$).
(1) $E[X|\mathcal{G}]$ は $\mathcal{G}$-可測.
(2) Y が有界で $\mathcal{G}$-可測ならば, $E[Y E[X|\mathcal{G}]] = E[YX]$.

Theorem 2.10 $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族 $\mathcal{G}$ と $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対し, Lemma 2.9 の 2 つの条件をみたす確率変数 $Z = E[X|\mathcal{G}]$ が P-a.s. に一意的に存在.

***Definition* 2.11** Theorem 2.10 の $E[X|\mathcal{G}]$ を X の $\mathcal{G}$ による条件つき平均または条件つき期待値といい, $P(A|\mathcal{G}) = E[1_A|\mathcal{G}]$ $(A \in \mathcal{F})$ を条件つき確率という.

***Remark* 2.12** $P(A|\mathcal{G})$ は A に依存する零集合を除いて定まる確率変数なので, $P(\,\cdot\,|\mathcal{G})$ が確率測度であるとは結論できない.

Proposition 2.13 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ と $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対し,
(1) $E[X|\mathcal{G}]$ は X に関して線形, 正値, 単位的.
(2) X が $\mathcal{G}$-可測ならば $E[X|\mathcal{G}] = X$ a.s.
(3) X が $\mathcal{G}$ と独立ならば $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ a.s.

Theorem 2.14 (Jensen の不等式) $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と凸関数 $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し,

$$E[\varphi(X)|\mathcal{G}] \geqq \varphi(E[X|\mathcal{G}]) \quad \text{a.s.}$$

3　実確率変数列の収束の階層

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$：確率空間,　$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$：Borel 可測空間.

***Definition* 3.1**　距離空間上の確率分布列の弱収束（詳しい性質は次節で）.

***Definition* 3.2**　実確率変数列の概収束, 確率収束, 法則収束, 平均収束

***Remark* 3.3**　実確率変数すなわち $\mathbb{R}$-値の場合に述べるが, $\mathbb{R}^d$-値に拡張するのは容易（絶対値を Euclid ノルムに置き換えればよい）.

Lemma 3.4 (Borel–Cantelli の補題)　$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P(A_n \ \text{ i.o. }) = 0$.

Theorem 3.5　実確率変数列 X_n の X への収束について
(1) 概収束 $\Longrightarrow$ 確率収束,　平均収束 $\Longrightarrow$ 確率収束,　確率収束 $\Longrightarrow$ 法則収束.
(2) 確率収束 $\Longrightarrow$ 概収束する部分列が存在.
(3) 確率収束かつ一様可積分 $\Longrightarrow$ 平均収束.

Exercise 3.1　Theorem 3.5(の一部) の証明, 反例の考察.

***Definition* 3.6**　確率収束の位相に関する距離空間 $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$:
$D(X, Y) = E[\phi(|X - Y|)]$　ただし $\phi : \mathbb{R}_{\geqq 0} \longrightarrow [0, 1]$ は有界連続凹非減少, 0 の近傍で真に増加, $\phi(0) = 0$.

Proposition 3.7　(1) D は距離.
(2) 実確率変数列について, 距離 D に関する収束 $\Longleftrightarrow$ 確率収束.

***Remark* 3.8**　実確率変数列の概収束は何らかの位相に関する収束ではない.

4　分布族の位相, Prokhorov の定理

***Definition* 4.1**　距離空間における用語の復習：　コンパクト, 相対コンパクト, 全有界, 完備, 可分, $\cdots$

Lemma 4.2　(S, d) が可分距離空間ならば, d と同値な距離 $\tilde{d}$ で $(S, \tilde{d})$ が全有界になるものが存在.

Lemma 4.3　K がコンパクト距離空間ならば, $C(K)$ は一様ノルムに関して完備可分距離空間.

Theorem 4.4 (Riesz の表現定理)　K がコンパクト距離空間ならば, $C(K)$ 上の有界正値線形汎関数と $(K, \mathcal{B}(K))$ 上の有界測度とが次式で 1 対 1 に対応する:

$$\psi(f) = \int_K f(x)\nu(dx), \qquad f \in C(K).$$

Exercise 4.1　Riesz の表現定理 (および K をもっと一般化したバージョン) の証明.

Theorem 4.5　K がコンパクト距離空間ならば, $(K, \mathcal{B}(K))$ 上の確率測度全体 $\mathcal{P}(K)$ は弱収束の位相でコンパクト距離空間になる.

Theorem 4.6 (分布の弱収束の特徴づけ) 距離空間 M 上の有界連続関数全体, 一様連続関数全体をそれぞれ $C_b(M)$, $C_u(M)$ で表す. $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(M)$ に対して TFAE.

(i) $\lim_{n\to\infty} \int_M f d\mu_n = \int_M f d\mu$, $\qquad f \in C_b(M)$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_M f d\mu_n = \int_M f d\mu$, $\qquad f \in C_b(M) \cap C_u(M)$.

(iii) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqq \mu(F)$, $\qquad F$: M の閉集合.

(iv) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(O) \geqq \mu(O)$, $\qquad O$: M の開集合.

(v) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$, $\qquad B \in \mathcal{B}(M)$ s.t. $\mu(\partial B) = 0$.

特に $M = \mathbb{R}$ の場合, μ_n, μ の分布関数をそれぞれ F_n, F とすると次も同値.

(vi) $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, $\qquad x \in \mathbb{R}$ s.t. F が x で連続.

Exercise 4.2 Theorem 4.6(の一部) の証明. ただし, (i)$\Longrightarrow$(ii), (iii)$\Longleftrightarrow$(iv) は自明なので除く.

***Remark* 4.7** 可分距離空間 S 上の $\mathcal{P}(S)$ における弱収束を記述する距離 (Lemma 4.2, Theorem 4.6).

Theorem 4.8 (Prokhorov の定理) 可分距離空間 S 上の $\mathcal{P}(S)$ の部分集合 $\mathcal{Q}$ に対する 2 つの条件:
(C) $\mathcal{Q}$ が $\mathcal{P}(S)$ で相対コンパクト.
(T) $\mathcal{Q}$ が**緊密 (tight)**, すなわち $\quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists K$: コンパクト $\subset S \quad$ s.t. $\quad \forall \mu \in \mathcal{Q}, \quad \mu(K) \geqq 1 - \epsilon$.
について,
(1) (T) $\Longrightarrow$ (C).
(2) さらに S が完備ならば, (C) $\Longrightarrow$ (T).

***Remark* 4.9** Part II の d 次元 Brown 運動の構成において, $S = C([0,\infty); \mathbb{R}^d)$ のときに Prokhorov の定理を適用したい. 次節の Remark 5.9 も援用.

5 特性関数

まず Fourier 変換の復習.

***Definition* 5.1** $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ の Fourier 変換

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \xi \cdot x} f(x) dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Schwartz の急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D^\alpha f(x)|\,|x|^p < \infty \ (p \geqq 0, \alpha \in \mathbb{Z}^d_{\geqq 0}) \}$.

Lemma 5.2 (1) (等長性) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi.$$

(2) (反転公式) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi.$$

(3) $p_t(x) = (2\pi t)^{-d/2} \exp(-|x|^2/2t)$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の元で, $\quad \widehat{p_t}(\xi) = \exp(-2\pi^2 t |\xi|^2)$.

Exercise 5.1 Lemma 5.2 (の一部) の証明.

***Definition* 5.3** $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\varphi_\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x}\mu(dx), \qquad \xi \in \mathbb{R}^d$$

を μ の特性関数と言い, $\varphi_X(\xi) = \varphi_{P^X}(\xi) = E[e^{i\xi\cdot X}]$ を $\mathbb{R}^d$-値確率変数 X の特性関数と言う.

Lemma 5.4 $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ が原点において連続で正定値, すなわち

$$\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_k}\,\varphi(\xi_j - \xi_k) \geqq 0, \qquad n \in \mathbb{N},\ \alpha_j \in \mathbb{C},\ \xi_j \in \mathbb{R}^d$$

をみたせば, φ は $|\varphi(\xi)| \leqq \varphi(0)$ をみたし, かつ一様連続.

Proposition 5.5 (特性関数の性質) $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ について

(1) φ_μ は連続, 正定値, $\varphi_\mu(0) = 1$, $|\varphi_\mu(\xi)| \leqq 1$ $(\xi \in \mathbb{R}^d)$.

(2) $\varphi_{\mu*\nu} = \varphi_\mu\varphi_\nu$, すなわち確率変数 X, Y が独立ならば $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$.

(3) $\varphi_\mu = \varphi_\nu$ ならば $\mu = \nu$.

(4) $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ で μ_n が μ に弱収束すれば, φ_{μ_n} が φ_μ に各点収束.

Proposition 5.6 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $t > 0$ に対して

$$\mu\big(\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x| \geqq \frac{2}{t}\}\big) \leqq \frac{1}{t}\int_{-t}^{t}(1 - \varphi_\mu(\xi))d\xi.$$

Theorem 5.7 (Lévy の連続性定理) $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ で φ_{μ_n} が原点で連続な関数 φ に各点収束すれば

$$\exists \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \quad \text{s.t.} \quad \lim_{n\to\infty}\mu_n = \mu \ (\text{弱収束}), \quad \varphi_\mu = \varphi.$$

Corollary 5.8 (Glivenko の定理) $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ で φ_{μ_n} が φ_μ に各点収束すれば, μ_n が μ に弱収束.

***Remark* 5.9** Prokhorov の定理を $S = \mathbb{R}^d$ で適用. 一般に, 点列の収束を示すのに

- 相対コンパクト性
- 集積点の一意性

の 2 つをチェックする方法は汎用的.

Exercise 5.2 距離空間 M における点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が相対コンパクトで集積点が高々 1 つしかなければ M の点に収束する.

Lemma 5.10 $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ が連続正定値かつ $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ならば, $\widehat{\varphi}(x) \geqq 0$ $(x \in \mathbb{R}^d)$ かつ $\|\widehat{\varphi}\|_{L^1} = \varphi(0)$.

Theorem 5.11 (Bochner の定理) $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ が連続正定値かつ $\varphi(0) = 1$ ならば,

$$\exists \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \quad \text{s.t.} \quad \varphi(\xi) = \varphi_\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x}\mu(dx), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

***Remark* 5.12** 正規分布 $\nu_t(dx) = p_t(x)dx$ との畳み込みに相当すべき確率測度を捉える. $t \searrow 0$ のときに ν_t が δ_0 に弱収束することを用い, Lévy の連続性定理に持ち込む.

***Definition* 5.13** $m \in \mathbb{R}^d$ と $d \times d$ 正定値実対称行列 C に対し, $\varphi_{m,C} = \exp(im \cdot \xi - \frac{1}{2}\xi \cdot C\xi)$ を特性関数にもつ $\mu = N(m, C) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ を d 次元正規分布 (または Gauss 分布) と言う.

Exercise 5.3 (1) C が非退化ならば $N(m, C)$ は次の密度関数をもつ:

$$(2\pi)^{-d/2}(\det C)^{-1/2}\, e^{-\frac{1}{2}(x-m)\cdot C^{-1}(x-m)}.$$

(2) $N(m, C)$ の平均ベクトルは m, 共分散行列は C.
(3) $N(m, C)$ の台は?

6 大数の法則, 中心極限定理

$\mathbb{R}^d$-値 **IID** 確率変数 $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ s.t. $X_n = (X_n^{(j)})_{j=1}^d$, $E[X_n^{(j)}] = 0$, $E[X_n^{(j)\,2}] < \infty$.
$C = \left[E[X_1^{(j)} X_1^{(k)}]\right]_{j,k=1}^d$ (正定値実対称)

Theorem 6.1 (大数の強法則: strong law of large numbers)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n X_m = 0 = E[X_1] \qquad \text{a.s.}$$

***Remark* 6.2** 大数の弱 (weak) 法則は確率収束を主張. 分散の評価と Chebyshev の不等式から容易.

Theorem 6.3 (中心極限定理: central limit theorem)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^n X_m = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^n X_m - E[X_1]\Big) = Z \sim N(0, C) \quad (\text{法則収束}).$$

Exercise 6.1 特性関数を用いた Theorem 6.3 の証明.

PART II　Brown 運動

7　確率過程, 関数空間上の測度

***Definition* 7.1**　確率過程 $\boldsymbol{X} = (X(t))_{t\in T}$ とは, $\forall t \in T$, $X(t) : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ が可測. パラメータ集合 T は一般でよいが, 具体的には時間を表すことが多い. $T = [0,1], [0,\infty), \mathbb{Z}_{\geqq 0}, \cdots$. このように T が自然な Borel 集合族 $\mathcal{B}(T)$ をもつとき, $\boldsymbol{X}$ が可測過程とは,

$$X : (t,\omega) \longmapsto X(t,\omega), \quad (T\times\Omega, \mathcal{B}(T)\times\mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \qquad \text{が可測.}$$

確率過程の法則同等・同等・強同等.

***Definition* 7.2**　$\mathbb{R}^T$ 上の有限次元射影

$$p_S : (x(t))_{t\in T} \in \mathbb{R}^T \longmapsto (x(t))_{t\in S} \in \mathbb{R}^S, \qquad S \subset T,\ \sharp S < \infty$$

が生成する σ-加法族 $\mathcal{B}^T$, $\mathbb{R}^T$ の積位相に関する Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. $\boldsymbol{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^T$ の分布は, $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$ 上ではなく $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$ 上で考える.

***Definition* 7.3**　T の有限部分集合 S 全体を添字にもつ確率測度の族 $\{\mu_S\}_{S\subset T, \sharp S<\infty}$ $(\mu_S \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^S))$ の無矛盾性 (consistency):　$S \subset S' \Longrightarrow (p_{SS'})_*\mu_{S'} = \mu_S$. ただし $p_{SS'} : \mathbb{R}^{S'} \longrightarrow \mathbb{R}^S$ は射影.

Theorem 7.4 (Kolmogorov の拡張定理)　$\{\mu_S\}_{S\subset T,\sharp S<\infty}$ が無矛盾ならば, $(p_S)_*\mu = \mu_S$ をみたす $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^T)$ が一意的に存在.

***Remark* 7.5**　因子空間 $\mathbb{R}$ の良い性質, すなわちその上の Borel 測度がコンパクト正則であるという事実が鍵. コンパクト集合に帰着して **Hopf の拡張定理**を適用.

***Definition* 7.6**　$T \subset [0,\infty)$ で (広義) 一様収束の位相を備えた $C(T;\mathbb{R}) = C(T)$, Borel 集合族 $\mathcal{B}(C(T))$.
$\boldsymbol{X}$ が連続過程 $\Longleftrightarrow$ a.s. ω に対して $X(\,\cdot\,,\omega) \in C(T)$.

Exercise 7.1　(1) T が可算集合ならば $\mathcal{B}^T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.
(2) T が非可算集合ならば, 1 点部分集合 $\{x\}$ は $\mathcal{B}^T$ に属さない (もちろん $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ には属す).
(3) T が非可算集合ならば, $C(T)$ は $\mathcal{B}^T$ に属さない.
(4) T が非可算集合ならば, $\mathcal{B}^T \subsetneqq \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.

***Remark* 7.7**　$\mathcal{B}(C(T)) = \mathcal{B}^T \cap C(T) := \{A\cap C(T) \mid A \in \mathcal{B}^T\}$. すなわち, $C(T)$ 上の有限次元射影全体が生成する σ-加法族は $C(T)$ の Borel 集合族に一致.

***Remark* 7.8**　以上のことは $\mathbb{R}^d$-値確率過程についてもそのまま成り立つ. $(\mathbb{R}^d)^T$, $C(T;\mathbb{R}^d)$.

***Remark* 7.9**　$\mathcal{P}(C(T;\mathbb{R}^d))$ の中で μ_n が μ に $n\to\infty$ で弱収束すれば, $\forall S\subset T, \sharp S<\infty$ に対し, $\mathcal{P}((\mathbb{R}^d)^S)$ の中で $(p_S)_*\mu_n$ が $(p_S)_*\mu$ に弱収束する.

8 Gauss 系

***Definition* 8.1** $\boldsymbol{X} = (X(t))_{t\in T}$ (T は任意の集合) が Gauss 系とは, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, \cdots, t_n \in T$, $(X(t_1), \cdots, X(t_n)) \sim n$ 次元 Gauss 分布 (退化していてもよい).

***Remark* 8.2** Gauss 分布は特性関数を経由して定義された (Definition 5.13). 以下の結果も主として特性関数の計算により得られる.

Lemma 8.3 $(Z_1, \cdots, Z_n) \sim n$ 次元 Gauss $\iff$ $Z_1, \cdots, Z_n$ の任意の実線形結合 ~ 1 次元 Gauss.

Theorem 8.4 (Gauss 系の存在と一意性)
(1) $(X(t)), (Y(t))$ がともに Gauss 系で平均と共分散が等しければ, すなわち $\forall t, s \in T$ に対して

$$E[X(t)] = E[Y(t)], \qquad \mathrm{Cov}(X(s), X(t))) = \mathrm{Cov}(Y(s), Y(t))$$

ならば, $(X(t))$ と $(Y(t))$ が法則同等.
(2) 関数 $m : T \longrightarrow \mathbb{R}$ と対称正定値関数 $C : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \cdots, t_n \in T$, $[C(t_j, t_k)]_{j,k=1}^n$ が正定値実対称行列) が与えられれば, $\forall t, s \in T$ に対して

$$m(t) = E[X(t)], \qquad C(s, t) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t))$$

をみたす Gauss 系 $(X(t))_{t\in T}$ が存在.

***Remark* 8.5** Gauss 系は「1 点および 2 点関数」のみで全体の構造 (つまり高次の相関までも) が決まるということ. Theorem 8.4 の (1) では, $(X(t)), (Y(t))$ が定義される土台の確率空間は異なっていてよい.

Exercise 8.1 実確率変数 $X \sim N(m, v)$ の n 次モーメント $E[X^n]$ を m と v の多項式で表示.

Proposition 8.6 (Gauss 系での独立性) $(X(t))_{t\in T}$ が Gauss 系で, $T_j \subset T$, $T_j \cap T_k = \varnothing$ $(j \neq k)$ のとき,

$$\{(X(t))_{t\in T_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ が独立} \iff \mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = 0, \ \ s \in T_j, t \in T_k, \, j \neq k.$$

Corollary 8.7 平均 0 の Gauss 系 $(X(t))_{t\in T}$ では,

$$(X(t))_{t\in T_1} \text{ と } (X(t))_{t\in T_2} \text{ が独立} \iff \mathrm{span}(X(t))_{t\in T_1} \perp \mathrm{span}(X(t))_{t\in T_2} \text{ in } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Proposition 8.8 Gauss 系 $(X(t))_{t\in T}$ の実線形結合全体を $\mathcal{L}$ とする (Lemma 8.3 より $\mathcal{L}$ も Gauss 系). $X_n \in \mathcal{L}$ が X に $n \to \infty$ で確率収束すれば,
- $X \sim$ Gauss 分布
- $\forall p \in (0, \infty)$ に対して X_n が X に p 次平均収束

が成り立つ. したがって, $\mathcal{L}$ の確率収束の位相に関する閉包 $\overline{\mathcal{L}}$ も Gauss 系.

Exercise 8.2 実確率変数 $X_n (n \in \mathbb{N}), X$ について

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \text{ in probability} \quad \text{かつ} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|^q] < \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} X_n = X \text{ in } L^p, \ \forall p \in [0, q).$$

9　Brown 運動, Wiener 測度

Brown 運動の構成法その一. Gauss 系の存在と一意性 (Theorem 8.4) を用いてまず然るべき平均と共分散をもつ Gauss 系として (広義の)Brown 運動を導入. その後に同等な連続過程 (連続変形) が取れることを示す.

***Definition* 9.1**　$\mathbb{R}^d$-値確率過程 $(X(t))_{t\in[0,\infty)}$, $X(t)=(X_1(t),\cdots,X_d(t))$, において

(B1) $(X_j(t))_{j=1,2,\ldots,d;t\in[0,\infty)}$ が Gauss 系

(B2) $E[X_j(t)]=0$ かつ $E[X_j(s)X_k(t)]=(s\wedge t)C_{ij}$　($C=[C_{ij}]$ は $d\times d$ 正定値実対称行列)

がみたされるとき, $(X(t))_{t\in[0,\infty)}$ を共分散行列 C の広義の Brown 運動 (Wiener 過程) と呼ぶ. さらに

(B3) a.s. $\omega\in\Omega$ に対して $X(\,\cdot\,,\omega)\in C([0,\infty);\mathbb{R}^d)$

をみたせば共分散行列 C の **Brown 運動 (Wiener 過程)** と呼ぶ. 可測写像 $\omega\longmapsto X(\,\cdot\,,\omega)\in C([0,\infty);\mathbb{R}^d)$ による P の像測度を共分散行列 C の **Wiener 測度**と呼ぶ ($C([0,\infty);\mathbb{R}^d)$ 上の Borel 構造についての Exercise 7.1(4) に留意). 特に共分散行列が単位行列のとき単に d 次元 Brown 運動と言う. 各時点 t で d 次元 Brown 運動の d 個の成分は独立.

Lemma 9.2　$d\times d$ 正定値実対称行列 $C=[C_{ij}]$ と $T=\{1,2,\ldots\}\times[0,\infty)$ に対し, $T\times T$ 上の関数 $C(i,s;j,t)=(s\wedge t)C_{ij}$ は正定値.

Proposition 9.3　共分散行列 C の広義の Brown 運動 $(X(t))_{t\in[0,\infty)}$ が存在し, 次をみたす.

(1) $X(0)=0$.

(2) $X(t)-X(s)\ \sim\ N(0,(t-s)C)$,　　$0\leqq s<t$.

(3) (**独立増分性**) $0=t_0<t_1<\cdots<t_n\quad\Longrightarrow\quad X(t_1)-X(t_0),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ が独立.

逆に $\mathbb{R}^d$-値確率過程 $(X(t))_{t\in[0,\infty)}$ が (1), (2), (3) をみたせば, 共分散行列 C の広義の Brown 運動である.

Lemma 9.4　$\mathbb{R}^d$-値確率変数 $Z\ \sim\ N(0,tC)$ ならば

$$E[|Z|^{2n}]\leqq\frac{d^n(2n)!}{2^n n!}\Big(\sum_{j=1}^d C_{jj}^n\Big)\,t^n.$$

Theorem 9.5 (Kolmogorov の連続変形定理)　$\mathbb{R}^d$-値確率過程 $(X(t))_{t\in[0,\infty)}$ が

$$\exists\alpha,\beta,M>0\quad\text{s.t.}\quad E[|X(t)-X(s)|^\alpha]\leqq M(t-s)^{1+\beta},\quad\forall s,t\in[0,\infty),\ s<t \tag{9.1}$$

をみたせば, $(X(t))_{t\in[0,\infty)}$ と同等で次をみたす確率過程 $(Y(t))_{t\in[0,\infty)}$ がとれる:　a.s. に

$$\forall a\in(0,\beta/\alpha),\ \forall N\in\mathbb{N},\qquad\lim_{h\to0}\sup_{s,t\in[0,N],0<t-s<h}\frac{|Y(t)-Y(s)|}{|t-s|^a}=0.$$

Lemma 9.6　$(X(t))_{t\in[0,N]}$ が $\forall s,t\in[0,N]\cap\mathbb{Q}_2$ (2 進有理数) に対して (9.1) をみたせば, $\forall a\in(0,\beta/\alpha)$, $\exists\delta=\delta(\alpha,\beta,a)\in(0,1)$, $\exists\eta=\eta(\alpha,\beta,a,\delta)>0$ s.t.　$\forall m\in\mathbb{N}$,

$$P\Big(|X(t)-X(s)|\leqq\frac{2^{a(1-\delta)}3}{1-2^{-a}}(t-s)^a;\ \forall s,t\in[0,N]\cap\mathbb{Q}_2,\ 0<t-s<\frac{1}{2^{m(1-\delta)}}\Big)\geqq1-\frac{MN}{2^{m\eta}(1-2^{-\eta})}$$

Theorem 9.7　共分散行列 C の Brown 運動 $(B(t))_{t\in[0,\infty)}$ が存在し, a.s. に $B(t)$ は $1/2$ にいくらでも近い次数の Hölder 連続性をもつ. (cf. Remark 11.5. 有限時区間の Brown 運動の独立コピーをつなぐ.)

10 Donsker の不変原理

Brown 運動の構成法その二．ランダムウォークからできる確率過程の時空に関するスケーリング極限として Brown 運動を構成する．単に Brown 運動の有限時刻での同時分布やそれがみたす方程式のレベルでの極限ではなく, 経路の空間上での極限である．

***Definition* 10.1** $\mathcal{W} = C([0,\infty);\mathbb{R}^d) \ni w_1, w_2$,

$$d(w_1,w_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\bigl(1 \wedge \sup_{t\in[0,n]} |w_1(t) - w_2(t)|\bigr).$$

$(\mathcal{W}, d)$ は完備可分距離空間（広義一様収束の位相）．

Proposition 10.2 (Ascoli–Arzelà の定理) $K \subset \mathcal{W}$ について TFAE.

(ア) K が全有界.

(イ) K が広義一様有界かつ同程度連続, すなわち

(i) $\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sup_{w\in K}\sup_{t\in[0,N]}|w(t)| < \infty$.

(ii) $\forall t \in [0,\infty),\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall s \in [0,\infty), \quad |s-t| \leqq \delta \implies \sup_{w\in K}|w(s)-w(t)| \leqq \epsilon$.

***Remark* 10.3** $\mathcal{W}$ が完備距離空間だから, $K \subset \mathcal{W}$ について K が全有界 $\iff$ K が相対コンパクト.

***Remark* 10.4** 簡単なコンパクト性の議論より, (イ) の (ii) では任意有界区間上で同程度一様連続.

Proposition 10.5 $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$ について，$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists \alpha_N, \beta_N, M_N, \gamma, C > 0$ s.t.

$$\int_{\mathcal{W}} |w(0)|^{\gamma}\mu_n(dw) \leqq C,$$
$$\int_{\mathcal{W}} |w(t)-w(s)|^{\alpha_N}\mu_n(dw) \leqq M_N|t-s|^{1+\beta_N}, \qquad \forall s,t \in [0,N]$$

ならば, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ は緊密 (tight).

***Definition* 10.6** $\xi_1, \xi_2, \cdots : (\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $\mathbb{R}^d$-値 IID 確率変数列，$S_0 \equiv 0,\ S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$，$d$ 次元ランダムウォーク $S_0, S_1, S_2, \cdots$ の値を線分で補間して折れ線をつくる:

$$Y(t) = S_{n-1} + (t-(n-1))(S_n - S_{n-1}), \qquad t \in [n-1, n].$$

$Y(t)$ に時空のスケール変換を施す:

$$Y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}Y(nt), \qquad n \in \mathbb{N},\ t \in [0,\infty).$$

$\mathcal{W}$-値確率変数 Y_n の分布 $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathcal{W})$．すなわち $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ に対して

$$P\bigl((Y_n(t_0),\cdots,Y_n(t_k)) \in B\bigr) = \mu_n\bigl(\{w \in \mathcal{W} \mid (w(t_0),\cdots,w(t_k)) \in B\}\bigr), \qquad B \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^k).$$

Theorem 10.7 (Donsker の不変原理) Definition 10.6 の記号のもとで, $E[\xi_1] = 0,\ E[|\xi_1|^4] < \infty$ とし, ξ_1 の共分散行列を C とする．このとき, μ_n は $n \to \infty$ で共分散行列 C の Wiener 測度 μ_C に弱収束する．

Lemma 10.8 $E\bigl[|\xi_1 + \cdots + \xi_n|^4\bigr] \lesssim n^2$

11　Brown 運動とランダム級数

Brown 運動の構成法その三. 標準正規分布にしたがう IID 列を係数にもつ「ランダム Fourier 級数」によって Brown 運動を導入する. まずは逆の考察から.

***Definition* 11.1**　1 次元 Brown 運動 $(B(t))_{t\in[0,1]}$ が張る実 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$. すなわち $\mathcal{H}$ は $(B(t))_{t\in[0,1]}$ の実線型結合全体 $\mathcal{L}$ の確率収束位相に関する閉包で, 内積は $(X,Y)_{\mathcal{H}} = E[XY]$. $W : L^2([0,1]) \longrightarrow \mathcal{H}$ を

$$W\Big(\sum_{k=0}^{m-1} a_k 1_{[t_k,t_{k+1})}\Big) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(B(t_{k+1}) - B(t_k)), \quad t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = 1,\ a_k \in \mathbb{R} \quad (11.1)$$

(well-defined) の等長拡大で定義される同型とする (Lemma 11.2). $W(f)$ を Wiener–角谷積分と言う:

$$W(f) = \int_0^1 f(t)dB(t), \qquad f \in L^2([0,1]).$$

Lemma 11.2　(1)　(11.1) で定まる W は線型かつ等長. したがって $L^2([0,1])$ まで等長に拡大される.
(2)　$W : L^2([0,1]) \longrightarrow \mathcal{H}$ は全射.
(3)　$L^2([0,1])$ の正規直交基底 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して $Z_n = \int_0^1 \varphi_n(t)dB(t)$ とおくと, $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は標準正規分布にしたがう IID 列で,

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int_0^t \varphi_n(s)ds\Big)Z_n. \quad (11.2)$$

(11.2) によって Brown 運動を構成する.

***Definition* 11.3**　$H = \{h : [0,1]$ 上の実数値絶対連続関数 $\mid h(0) = 0,\ h' \in L^2([0,1])\}$ (Cameron–Martin 空間). H は内積 $(h_1,h_2)_H = \int_0^1 h_1'(t)h_2'(t)dt$ に関して Hilbert 空間.
▶ $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が H の正規直交基底 $\iff$ $\{h_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $L^2([0,1])$ の正規直交基底.

Theorem 11.4　標準正規分布にしたがう IID 列 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と H の正規直交基底 $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとって

$$X_n(t,\omega) = \sum_{k=0}^{n} h_k(t)\xi_k(\omega), \qquad t \in [0,1],\ \omega \in \Omega.$$

(1)　$\exists\ \lim_{n\to\infty} X_n(t,\omega) = X(t,\omega)$　a.s.　(t について一様収束, したがって $X(\cdot,\omega)$ は連続関数).
(2)　$(X(t))_{t\in[0,1]}$ は 1 次元 Brown 運動.

***Remark* 11.5**　Theorem 11.4 で作った $[0,1]$ 上の Brown 運動を独立につないで $[0,\infty)$ 上の Brown 運動を構成できる. すなわち可算個の独立なコピー $(X^{(k)}(t))_{t\in[0,1]}$ を同一確率空間上にとって,

$$B(t,\omega) = X^{(1)}(1,\omega) + \cdots + X^{(k)}(1,\omega) + X^{(k+1)}(t-k,\omega), \qquad k \leqq t \leqq k+1$$

とおくと, $(B(t))_{t\in[0,\infty)}$ は 1 次元 Brown 運動.

12　Brown 運動と Markov 過程

Brown 運動の構成法その四.

レポート問題１

問題 [**1**] 次の定理のどれか 2 つの条件の同値性を示しなさい. ただし, (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) は簡単すぎるので除く.

定 理 $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数全体, 一様連続関数全体をそれぞれ $C_b(\mathbb{R})$, $C_u(\mathbb{R})$ で表す. $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, それぞれの分布関数 F_n, F に対して, 次の条件が同値.

(i) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f d\mu, \qquad f \in C_b(\mathbb{R})$.
(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f d\mu, \qquad f \in C_b(\mathbb{R}) \cap C_u(\mathbb{R})$.
(iii) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqq \mu(F), \qquad F$ が $\mathbb{R}$ の閉集合.
(iv) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(O) \geqq \mu(O), \qquad O$ が $\mathbb{R}$ の開集合.
(v) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ s.t. $\mu(\partial B) = 0$.
(vi) $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \qquad x \in \mathbb{R}$ s.t. F が x で連続.

問題 [**2**] 実確率変数列が確率収束すれば法則収束する（つまり上の定理の条件をみたす）ことを示しなさい.

問題 [**3**] $\mathbb{R}$ 上の具体的な分布の特性関数を (自分で適宜選んで）計算しなさい.

▶ **注 意**　提出は講義時に限定（レポート提出ボックスは設けない）. 期限は１１月２８日 (金).

レポート問題２

問題 [**1**] $\xi_1, \xi_2, \cdots$ が IID 実確率変数列であって $E[\xi_1] = 0$ かつ $0 < E[\xi_1^4] < \infty$ をみたすとき,

$$E\big[(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)^4\big]$$

は n^2 の増大度をもつことを示しなさい.

問題 [**2**] $(B(t))_{t\in[0,\infty)}$ が 0 を出発する Brown 運動であるとき, 正定数 c に対して

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{c}} B(ct)\Big)_{t\in[0,\infty)}$$

も 0 を出発する Brown 運動であることを示しなさい.

▶ **注 意**　提出は講義時に限定（レポート提出ボックスは設けない）. 期限は１月２２日 (木).

試験問題　A または B のどちらかを選択しなさい

問題 A　0 を出発する 1 次元 Brown 運動 $(B(t))_{t\in[0,\infty)}$ と $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数 f に対して次式で u を定める:

$$u(t,x) = E[f(B(t)+x)], \qquad t \in [0,\infty),\ x \in \mathbb{R}.$$

u が $u_t = \frac{1}{2}u_{xx}$ および $u(0,x) = f(x)$ をみたすことを示しなさい.

問題 B　なるべく数式を用いずに Brown 運動の構成のあらすじを述べなさい. ただし, 解答欄におさまる程度の字数で.

解答