

2007 (平成19) 年度後期 確率論 III (4年) / 確率論概論 III (大学院)
レポート問題 (その3)

担当 洞 彰人 (大学院多元数理科学研究科)

- ▶ 学年, 氏名を1ページ目に明記すること. 数理学科 / 多元数理科学研究科以外の方は所属学科 / 研究科も.
- ▶ 提出期限: M2の方は2月4日(月)午後1時(成績締め切り逼迫のため). その他の人は2月7日(木). 提出場所はコントロールルーム内のボックス.
- ▶ 以下, $((B(t))_{t \in [0, \infty)}, (P_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ を d 次元 Brown 運動とする. その他の定義, 術語等で不明なものは, 講義のノート等を参照すること.

問題 12.21. (1) $t > 0$ と $x, y \in \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) に対して

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)$$

とおくとき, 次の等式を示せ.

$$\int_{\mathbb{R}^d} p(s, x, z)p(t, z, y)dz = p(s+t, x, y).$$

(2) 有界 Borel 可測関数 $f: (\mathbb{R}^d)^k \rightarrow \mathbb{R}$ と $0 < t_1 < \dots < t_k$ に対して次の等式を示せ.

$$\begin{aligned} & E_x[f(B(t_1), \dots, B(t_k))] \\ &= \int_{(\mathbb{R}^d)^k} f(y_1, \dots, y_k)p(t_1, x, y_1)p(t_2 - t_1, y_1, y_2) \cdots p(t_k - t_{k-1}, y_{k-1}, y_k)dy_1 \cdots dy_k. \end{aligned}$$

問題 1.11. \mathbb{R}^d 上の関数 f に対して

$$(T_t f)(x) = E_x[f(B(t))]$$

が有界線型作用素 $T_t: X \rightarrow Y$ を定めるような関数空間 X, Y をいろいろ設定してみよ ($X = Y$ でもかまわない). そのときの作用素ノルム $\|T_t\|$ を求めよ.

問題 1.25. 平均 λ の Poisson 分布を $Po(\lambda)$ で表すことにする.

(1) $Po(\lambda) * Po(\mu) = Po(\lambda + \mu)$ を示せ.

(2) $Po(\lambda)$ の階乗モーメントとモーメントを λ で表示する式を求めよ. ただし, 確率変数 X の n 次階乗モーメントとは $E[X(X-1)\cdots(X-n+1)]$.

(3) $\lambda'(t)$ が与えられているとして次の微分方程式を解け (Poisson 分布の確率関数を代入してチェックする方法はやめてほしい).

$$p'_0 = -\lambda' p_0, \quad p'_n = \lambda'(p_{n-1} - p_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

問題 2.1. 講義中に紹介した定理, 命題, 補題等の中で次に該当するものがあれば, その主張を正確に述べて証明を与えよ.

- (1) 証明にギャップがあったもの, あるいは証明に誤りがあったもの.
- (2) 証明を与えなかったもの.
- (3) 仮定をもっと弱く, あるいは結論をもっと強くできるもの.