2007.12.14

２００７（平成１９）年度後期　確率論 III（４年）／確率論概論 III（大学院）

レ ポ ー ト 問 題　（その２）

担当　　洞　彰人　（大学院多元数理科学研究科）

▶ 学年, 氏名を１ページ目に明記すること. 数理学科／多元数理科学研究科以外の人は所属学科／研究科も.

▶ **提出期限は１２月２７日（木）**. 提出場所はコントロールルーム内のボックス.

▶ 以下, 定義, 術語等で不明なものは, 講義のノート等を参照すること.

問題 11.2. $\mathbb{R}^d$-値の独立確率変数列に対する次の中心極限定理を示せ. 記号の定義, 仮定する条件, 収束の意味も適宜設定して明示すること.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\Big(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-E[X_1]\Big)=Z\sim N(0,C).$$

問題 11.9. T を任意の集合とし, 部分集合 $S\subset T$ に対して射影 $p_S:\mathbb{R}^T\longrightarrow\mathbb{R}^S$ を考える. S が T の有限部分集合全体を動くときにこれらを可測にする $\mathbb{R}^T$ の最小の σ-加法族を $\mathcal{B}_T$ で表す. ($\mathbb{R}^S$ 上では Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^S)$ を考える.) すなわち

$$\mathcal{B}_T=\sigma\Big[\bigcup_{S:\text{ finite }\subset T}p_S^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^S))\Big].$$

(1) T の可算部分集合 S に対しても上と同じように S の有限部分集合を動かして $\mathcal{B}_S$ を定義するとき

$$\mathcal{B}_T=\bigcup_{S:\text{ countable }\subset T}p_S^{-1}(\mathcal{B}_S)$$

が成り立つことを示せ.
(2) T が可算集合のとき, $\mathcal{B}_T$ は $\mathbb{R}^T$ の積位相に関する Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ に一致することを示せ.
(3) T が非可算集合のとき, $\mathbb{R}^T$ の１点からなる集合は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ に属するが $\mathcal{B}_T$ に属しないことを示せ. したがって $\mathcal{B}_T$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ に真に含まれる.
(4) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し, S_n を T の有限部分集合, K_n を $\mathbb{R}^{S_n}$ のコンパクト部分集合とするとき, 集合列 $\{p_{S_n}^{-1}(K_n)\}$ について, 任意有限交叉性から完全交叉性がしたがうこと, すなわち

$$\forall N\in\mathbb{N},\quad\bigcap_{n=1}^{N}p_{S_n}^{-1}(K_n)\neq\varnothing\qquad\Longrightarrow\qquad\bigcap_{n=1}^{\infty}p_{S_n}^{-1}(K_n)\neq\varnothing$$

が成り立つことを示せ.

問題 11.16. (1) $\mathbb{R}$-値確率変数 X_n, X について, $n \to \infty$ で X_n が X に確率収束してかつ

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|^q] < \infty$$

が成り立つとき, 任意の $p \in [0,q)$ に対して X_n が X に L^p の位相で収束することを示せ.
(2) 1 次元正規分布 $N(m,v)$ にしたがう確率変数 Z の偶数次モーメント $E[Z^{2N}]$ を m と v を用いて評価する式を作れ.

問題 11.30. (1) C を d 次実正定値対称行列とし, $T = \{1,2,\ldots,d\} \times [0,\infty)$ とおくとき,

$$C(i,j,s,t) = (s \wedge t)C_{ij}$$

は $T \times T$ 上の正定値関数であることを示せ.
(2) (1) の正定値関数 C から決まる平均 0 の Gauss 系 $\{X_i(t)\}_{(i,t)\in T}$ をつくり, $X(t) = (X_1(t),\cdots,X_d(t))$ とおく. このとき, $s < t$ に対し, $X(t) - X(s)$ は d 次元正規分布 $N(0,(t-s)C)$ にしたがうことを示せ.

問題 12.7. (1) $[0,\infty)$ 上の $\mathbb{R}^d$-値連続関数全体 $\mathcal{W}$ に広義一様収束の位相を誘導する距離を入れ, 完備可分距離空間とする. $\mathcal{W}$ の全有界部分集合 K (この場合 K の閉包がコンパクトと同値) を特徴づける Ascoli–Arzelà の定理を述べてそれを示せ.
(2) $Z_1, Z_2, \cdots$ を平均 0 で 4 次モーメントが有限の $\mathbb{R}$-値独立同分布確率変数列とすると,

$$E[(Z_1 + \cdots + Z_n)^4]$$

は $n \to \infty$ のとき n^2 のオーダーでおさえられることを示せ. さらに, $\mathbb{R}^d$-値にしても, Z_1 の各成分が平均 0 で有限な 4 次モーメントを持てば

$$E[|Z_1 + \cdots + Z_n|^4]$$

が同様のオーダー評価を有することを示せ.

問題 12.14. 1 次元 Brown 運動 $(B(t))_{t\in[0,1]}$ に関する Wiener 積分

$$W : L^2([0,1]) \longrightarrow \mathcal{H} = \{B(t)\} \text{ の線形結合全体の確率収束位相に関する閉包}$$

を定義するため, まず階段関数 $f(t) = \sum a_k \, 1_{(t_k,t_{k+1}]}(t)$ に対して

$$W(f) = \sum_{k=0}^{m} a_k (B(t_{k+1}) - B(t_k))$$

とおく. これよりしかるべき手続きを踏み, W が $L^2([0,1])$ から $\mathcal{H}$ の上への等長同型として定まることを示せ.