2007.11.2

２００７（平成１９）年度後期　確率論 III（４年）／確率論概論（大学院）
レ ポ ー ト 問 題　（その１）

担当　　洞　彰人　（大学院多元数理科学研究科）

▶ 学年, 氏名を１ページ目に明記すること. 数理学科／多元数理科学研究科以外の人は所属学科／研究科も.

▶ **提出期限は１１月３０日（金）の正午**. 提出場所はコントロールルーム内のボックス.

▶ 以下, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間, $E[X]$ は確率変数 X の平均（期待値）, P^X は X の分布を表す. その他定義, 術語等で不明なものは, 適宜講義のノートを参照すること.

問題 1.1. (1) 確率変数 $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ と可測関数 $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqq 0}$ に対して

$$E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) P^X(dx)$$

を示せ.

(2) 確率変数 $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ について, 次の条件は同値である. このいずれか２つ以上の同値性を示せ.

(ア)　X, Y が独立

(イ)　$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)], \qquad \forall f, g \in C_b(\mathbb{R})$　($\mathbb{R}$ 上の有界連続関数)

(ウ)　$E[e^{i(sX+tY)}] = E[e^{isX}]E[e^{itY}], \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}$

(エ)　$P^{(X,Y)} = P^X \times P^Y$.

問題 1.2. 確率変数 $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し, X_n の X への収束 $(n \to \infty)$ について次を示せ.

(1) 概収束すれば確率収束, p 次平均収束すれば確率収束, 確率収束すれば法則収束する.

(2) 確率収束すれば, 概収束する部分列が存在する.

(3) 確率収束かつ p 次一様可積分 i.e.

$$\lim_{a \to \infty} \sup_n \int_{\{|X_n| > a\}} |X_n(\omega)|^p P(d\omega) = 0$$

ならば, p 次平均収束する.

(4) 確率収束は, 確率変数の空間上の適当な距離に関する収束と同値である（距離の候補については講義を参照）.

問題 1.3. $C_b(\mathbb{R}^d)=\{\mathbb{R}^d$上の有界連続関数$\}$, $C_u(\mathbb{R}^d)=\{\mathbb{R}^d$上の一様連続な関数$\}$ とおく. $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度 μ_n,μ について次の条件は同値である. このいずれか 2 つ以上の同値性を示せ. ただし, (ウ) $\Longleftrightarrow$ (エ) だけでは不可.

(ア) μ_n が μ に弱収束 $(n\to\infty)$ i.e.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu_n(dx)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu(dx),\qquad \forall f\in C_b(\mathbb{R}^d)$$

(イ) 条件 (ア) の関数族を $C_b(\mathbb{R}^d)\cap C_u(\mathbb{R}^d)$ に制限したもの

(ウ) 任意の閉集合 $F\subset\mathbb{R}^d$ に対し,

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)\leqq\mu(F)$$

(エ) 任意の開集合 $O\subset\mathbb{R}^d$ に対し,

$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(O)\geqq\mu(O)$$

(オ) 境界の測度が 0 の任意の Borel 集合 $B\subset\mathbb{R}^d$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(B)=\mu(B).$$

問題 1.4. (1) 正定値行列は Hermite 行列であることを示せ.
(2) 関数 $\varphi:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{C}$ が正定値 i.e.

$$\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_j\overline{\alpha_k}\varphi(\xi_j-\xi_k)\geqq 0,\qquad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{C},\ \forall\xi_1,\cdots,\xi_n\in\mathbb{R}^d$$

かつ原点で連続ならば, φ が有界連続であることを示せ.
(3) (2) をみたす関数 φ で $\varphi(0)=1$ となるものの例を挙げよ.