2012 前期

解析学要論 II　講義メモ

洞　彰人

これはまさにメモであり, 講義する項目の順をまちがえないように自分用に作成したものである. これを読んだだけで理解できるようには書かれていない. 特に証明は講義中に与えるので省略してある.

第 I 章　序

1　Riemann 積分可能性

Riemann 和
有界区間 $[a,b]$ 上の有界な実数値関数 f と, $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対して, $M_i = \sup_{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i} f(x)$, $m_i = \inf_{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i} f(x)$ とおき,

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) : \text{上 Riemann 和}, \qquad s_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) : \text{下 Riemann 和}.$$

Riemann 積分

$$S = \inf_\Delta S_\Delta : \text{上 Riemann 積分}, \qquad s = \sup_\Delta s_\Delta : \text{下 Riemann 積分}$$

$S = s$ が成り立つとき, f が $[a,b]$ 上で Riemann 積分可能

$$S = s = \int_a^b f(x)dx \quad : \quad f \text{ の Riemann 積分}$$

定理 1.1 (Darboux の定理) 分割幅を $|\Delta| = \max_i(x_i - x_{i-1})$ とすると,

$$S = \lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta, \qquad s = \lim_{|\Delta| \to 0} s_\Delta.$$

定理 1.2 (Riemann の定理) $[a,b]$ 上の有界な実数値関数 f に対して次の条件が同値である.
(ア) f が Riemann 積分可能.
(イ) $\forall \epsilon > 0$, 　$\exists$ 分割 Δ,

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leqq \epsilon.$$

区間における関数の**振動量**

$$O(f,I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x).$$

点における振動量 : $\epsilon_n > 0$, $\epsilon_n \searrow 0$ $(n \to \infty)$, 　$I_n = [x - \epsilon_n, x + \epsilon_n]$　として

$$O(f,x) = \lim_{n \to \infty} O(f, I_n). \tag{$*$}$$

補題 1.3 (1) $(*)$ の極限値が存在する.
(2) $(*)$ の値が点列 $\{\epsilon_n\}$ のとり方によらず定まる.
(3) f が x で連続 $\iff$ $O(f,x) = 0$.
(4) $\forall \delta > 0$, 　$\{x \in [a,b] \,|\, O(f,x) \geqq \delta\}$ が閉集合.

零集合： $A \subset \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ の零集合であるとは,
$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: 開区間の列,

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leqq \epsilon.$$

補題 1.4 $\mathbb{R}$ の部分集合について, 次のものはすべて零集合である.
(1) 可算集合　(2) 零集合の部分集合　(3) 可算個の零集合の合併

定理 1.5 (Lebesgue の定理) $[a,b]$ 上の有界な実数値関数 f に対し, 次の条件が同値である.
(ア) f が Riemann 積分可能.
(イ) f の不連続点全体のなす集合が零集合.

例 1.6 (Dirichlet の関数)： $f(x) = I_{\mathbb{Q} \cap [a,b]}(x)$.　ただし, $I_\cdot$ は集合の定義関数.
$\forall x \in [a,b], \ O(f,x) = 1$. したがって, f は Riemann 積分可能でない. 一方, $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ は零集合だから, 後述のように f は Lebesgue 積分可能で, 積分値は 0.

問題 1 写像 $f : X \longrightarrow Y$ の逆像について

$$(1)\ f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c \qquad (2)\ f^{-1}\big(\bigcup_\alpha A_\alpha\big) = \bigcup_\alpha f^{-1}(A_\alpha) \qquad (3)\ f^{-1}\big(\bigcap_\alpha A_\alpha\big) = \bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$$

問題 2 集合の対称差 $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ について

$$(1)\ A \triangle B = A^c \triangle B^c \qquad (2)\ A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$$

問題 3 集合 A の定義関数 I_A について

$$(1)\ I_{A \cap B} = I_A I_B \qquad (2)\ I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_A I_B \qquad (3)\ I_{A \triangle B} = (I_A - I_B)^2$$

問題 4 補題 1.3 の (4).

問題 5 補題 1.4 の (3).

問題 6 実数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ について
(1) 上極限 $\limsup_{n \to \infty} a_n$, 下極限 $\liminf_{n \to \infty} a_n$ の定義を述べよ.
(2) $\lim_{n \to \infty} a_n$ が存在　$\Longleftrightarrow$　$\limsup_{n \to \infty} a_n = \liminf_{n \to \infty} a_n$.

問題 7 $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f について
(1) f が点 a で下半連続, 上半連続であることの定義を述べよ.
(2) $\mathbb{R}$ の開集合の定義関数が下半連続であり, 閉集合の定義関数が上半連続である.

問題 8 $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f について
(1) f が下半連続ならば, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqq a\}$ が閉集合.
(2) f が上半連続ならば, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqq a\}$ が閉集合.

問題 9 実数値関数 f, g と $a \in \mathbb{R}$ に対し,
$f(x) + g(x) > a \iff \exists r \in \mathbb{Q},\ f(x) > r$ かつ $g(x) > a - r$.

2 Lebesgue 積分のアイデア

$\star$ 関数を近似するには, 定義域を分割するよりも値域を分割する方が直接的である.

$\star$ 正項級数は $+\infty$ も含めて取り扱いやすいので, それをフルに活用する.

有界区間 $[a,b]$ 上の非負値実数値関数 f

値域 $[0,\infty)$ の可算分割 $\Delta : 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_j < \cdots \nearrow \infty$, (分点は集積しないように)

$A_j = \{x \in [a,b] \,|\, y_{j-1} \leqq f(x) < y_j\}, \qquad j \in \mathbb{N}$

考え方

- A_j 上では定数 (たとえば y_{j-1} や y_j) になる関数で f を "近似" する.
- A_j に対しては区間の長さを一般化したような量 $m(A_j)$ が定められるとする. ただし, $m([a,b]) = b - a$.

$$S^\Delta = \sum_{j=1}^\infty y_j\, m(A_j) : \text{上 Lebesgue 和}, \qquad s^\Delta = \sum_{j=1}^\infty y_{j-1}\, m(A_j) : \text{下 Lebesgue 和} \qquad \text{(ともに仮用語)}$$

仮定

(i) 上のような $[a,b]$ の分割 : $[a,b] = \bigsqcup_{j=1}^\infty A_j$ において

$$b - a = m([a,b]) = \sum_{j=1}^\infty m(A_j).$$

(ii) 値域 $[0,\infty)$ の分割 Δ を動かしたときに

$$\sup_\Delta S^\Delta < \infty \qquad (f \text{ が有界ならば (i) のもとで OK}).$$

この仮定のもとに, 次のようにおく:

$$S = \inf_\Delta S^\Delta, \qquad s = \sup_\Delta s^\Delta.$$

補題 2.1 (1) $[0,\infty)$ の可算分割として Δ' が Δ の細分ならば, $s^\Delta \leqq s^{\Delta'}$, $S^{\Delta'} \leqq S^\Delta$.

(2) $s \leqq S$.

(3) $|\Delta| = \sup_{j\in\mathbb{N}}(y_j - y_{j-1})$ とおくと, $\lim_{|\Delta|\to 0}(S^\Delta - s^\Delta) = 0$.

定理 2.2 仮定 (i), (ii) のもとで

$$S = \lim_{|\Delta|\to 0} S^\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} s^\Delta = s$$

が成り立つ (Riemann 積分の Darboux の定理に相当).

Lebesgue 積分

定理 2.2 で得られた値を

$$\int_{[a,b]} f(x) m(dx) = \int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

と表す. 非負値とは限らない関数に対しては, $f = f^+ - f^-$ と分けて f^+, f^- にこれを適用し,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

と定める. ただし, $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

補題 2.3 (1) $\mathbb{R}$ の開集合 O は高々可算個の互いに素な有界区間の合併で表される:

$$O = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_n, \qquad I_n : \text{有界区間}. \tag{$*$}$$

(2) 開集合 O に対し, $(*)$ の $\{I_n\}$ のとり方によらず, $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ $(\leqq \infty)$ の値は一定である.

Lebesgue 測度

区間 I に対する $m(I) = |I| = b - a$ の拡張として, 開集合 O に対しては, 補題 2.3 で示されたように, 可算個の互いに素な区間 I_n による被覆を用いて

$$m(O) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

が意味をもつ. 空集合 $\varnothing$ に対しては $m(\varnothing) = 0$ とおく. さらに, 有界閉集合 (コンパクト集合)C に対しては, C を含む有界な開集合 O をとり,

$$m(C) = m(O) - m(O \cap C^c)$$

とおく. $O \cap C^c$ が開集合であることに注意. 有界な集合 A に対し,

$$m^*(A) = \inf_{\text{open } O \supset A} m(O) \ : \ A \text{ の Lebesgue 外測度}, \qquad m_*(A) = \sup_{\text{closed } C \subset A} m(C) \ : \ A \text{ の Lebesgue 内測度}$$

と定める. この内外の測度が一致するような A を Lebesgue 可測集合と呼び,

$$m(A) = m^*(A) = m_*(A)$$

を A の Lebesgue 測度の値とする. A が有界でないときには, 任意の有界な開集合 O に対して $A \cap O$ が可測集合になるとき, A を可測集合といい,

$$m(A) = \lim_{n \to \infty} m(A \cap O_n), \qquad O_n \text{は有界な開集合}, \quad O_n \subset O_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n = \mathbb{R}.$$

定理 2.4 $\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測集合全体 $\mathcal{L}$ と Lebesgue 測度 m は次をみたす.

• $\mathcal{L}$ について

(i) $\varnothing \in \mathcal{L}$ (ii) $A \in \mathcal{L}$ ならば $A^c \in \mathcal{L}$

(iii) 可算個の $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{L}$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$

(iv) 開集合全体 $\mathcal{O} \subset \mathcal{L}$ (v) 零集合全体 $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}$

• m について

(i) $m(\varnothing) = 0$

(ii) 可算個の $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{L}$ が互いに素ならば

$$m(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

(iii) 区間 $I = [a, b]$ に対し, $m(I) = b - a$

(iv) $N \in \mathcal{N}$ ならば $m(N) = 0$

注意 $[a,b]$ 上の非負実数値関数 f の積分を定義するには, $[0,\infty)$ の可算分割に伴う分点 y_j に対し,

$$A_j = \{x \in [a,b] \,|\, y_{j-1} \leqq f(x) < y_j\}$$

という形の集合の測度 $m(A_j)$ がはかれることが必要であった.

Lebesgue 可測関数
任意の $\alpha < \beta$ に対し, $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \alpha \leqq f(x) < \beta\} \in \mathcal{L}$ をみたす関数 f を Lebesgue 可測関数と呼ぶ.

定理 2.4 の証明は今は行わない. Lebesgue 測度に限らずもっと一般の枠組で (関数の定義域に位相概念を要しない形で) このような積分論を展開する. シラバスに述べたように, 話は 2 段階に分かれる.

- “外測度” の概念を中心にして測度の構成方法を論じる.
- 公理的に測度が与えられたとき, それに基づく積分論を展開する.

一般論の効用として, これもシラバスに述べたように,

- さまざまな測度に関する積分が統一的に理解でき, 積分の本質が顕になる.
- 代数構造や位相構造とは独立に抽象的な空間上で関数の積分を考えられる. たとえば, 確率論ではランダム性を表すパラメータ空間上の積分が期待値にほかならない.
- “複雑な” 集合上の積分論が展開できる. たとえば, フラクタル集合.

問題 10 実数値関数 f の正部 f^+ と負部 f^- について

(1) $f = f^+ - f^-$　　(2) $|f| = f^+ + f^-$　　(3) $(f+g)^+ \leqq f^+ + g^+$　　(4) $(f+g)^- \leqq f^- + g^-$

問題 11 実数値関数 f_n, f について, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ とすると,

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) > a\} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} \,|\, f_n(x) > a\}$$

問題 12 $\mathbb{R}$ 上の実数値関数列 $\{f_n\}$ の収束点 (すなわち $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するような $x \in \mathbb{R}$) の全体を C とおくと,

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m=N}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \Big\{x \in \mathbb{R} \,\Big|\, |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\Big\}.$$

問題 13 (後述の Fatou の補題の離散版) 2 重非負数列 $\{a_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$, $a_{n,k} \geqq 0$, に対し

$$\sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} a_{n,k} \leqq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

第 II 章　測度に基づく積分

3　可測空間と可測関数

σ-加法族

集合 X, X の部分集合の族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X) = 2^X$ (べき集合)

$\mathcal{F}$ が次の条件をみたすとする.

(i) $\varnothing \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$

(iii) 可算個の $A_1, A_2, A_3, \cdots \in \mathcal{F}$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

このとき, $\mathcal{F}$ を X の部分集合の σ-加法族という. $(X, \mathcal{F})$ を可測空間 (measurable space) と呼ぶ. X の部分集合で $\mathcal{F}$ に属するものを $\mathcal{F}$ 可測集合という. つまり, $\mathcal{F}$ という部分集合族を特定することによって X に “可測構造” を付与している.

注意 • (iii) で $A_n = A_{n+1} = \cdots$ とすれば, 有限個の合併の場合も含んでいる.

• (i), (ii) により, $X \in \mathcal{F}$.

• σ-加法族の別称として, 完全加法族, 可算加法族, σ-集合族, σ-集合代数, σ-集合体, $\cdots$.

補題 3.1 $\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ に対し, $\mathcal{A}$ を含む最小の σ-加法族が存在する.

補題 3.1 で示された $\mathcal{A}$ を含む最小の σ-加法族を $\sigma[\mathcal{A}]$ で表し, $\mathcal{A}$ で**生成される**σ-加法族 $\sigma[\mathcal{A}]$ と呼ぶ.

例 3.2 (位相空間の Borel 集合族) 位相空間 X に対し, X の開集合全体 $\mathcal{O}$ で生成される σ-加法族 $\sigma[\mathcal{O}]$ を X の Borel 集合族といい, $\mathcal{B}(X)$ と書く. これによって位相空間から可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$ が得られる. $\mathcal{B}(X)$ に属する集合を X の Borel 集合という.

補題 3.3 位相空間 X の Borel 集合族 $\mathcal{B}(X)$ は, X の閉集合全体 $\mathcal{C}$ で生成される.

注意 補題 3.3 は 2 つの σ-加法族の包含関係を示す典型例である. σ-加法族 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ に対して $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ を示したいとき, $\mathcal{F}$ の “任意の元”A をもってきてそれが $\mathcal{G}$ に属することを言おうとしても, 普通はうまくいかない. $\mathcal{F}$ を生成する (扱いやすい) 族 $\mathcal{A}$ に着目し, $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ が示されれば, $\mathcal{G}$ が σ-加法族であることから $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ がしたがう.

可測関数（可測写像）

可測空間 $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ 間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が可測 (measurable) であるとは,

$$f^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F} \qquad (\text{すなわち} \quad \forall B \in \mathcal{G},\ f^{-1}(B) \in \mathcal{F})$$

が成り立つことである. σ-加法族を明示して $\mathcal{F}/\mathcal{G}$-可測ということもある.

注意 位相空間の間の写像の連続性の定義との類似に注意する. 定値写像は可測である.

補題 3.4 写像 $f : X \longrightarrow Y$ と部分集合族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$ に対し,

$$\sigma[f^{-1}(\mathcal{A})] = f^{-1}(\sigma[\mathcal{A}]).$$

系 3.5 位相空間 X, Y に対し, 連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ は Borel 可測 (すなわち $\mathcal{B}(X)/\mathcal{B}(Y)$-可測) である.

命題 3.6 (実数値関数の可測性の言い換え) 可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の実数値関数 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して次の条件が同値である.
(ア) f が $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測.　すなわち, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.
(イ) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, に対し $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{F}$.
(ウ) $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{F}$.
(エ) $\forall a \in \mathbb{R}$ に対し $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$.

注意 命題 3.6 の (イ), (ウ), (エ) で, 区間の開・閉はどうとってもよい.

命題 3.7 可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の実数値関数 f, g が $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測ならば,
(1) 線型結合 $\alpha f + \beta g$　$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$　(2) 積 fg
も可測である.

問題 14 $\mathbb{R}$ の有界閉区間全体を $\mathcal{K}$ とおくと, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ が $\mathcal{K}$ で生成される.

問題 15 可測空間 $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G}), (Z, \mathcal{H})$ に対し, $f : X \longrightarrow Y$ が $\mathcal{F}/\mathcal{G}$-可測で $g : Y \longrightarrow Z$ が $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-可測ならば, その合成 $g \circ f : X \longrightarrow Z$ が $\mathcal{F}/\mathcal{H}$-可測である.

問題 16 集合 X の可算分割 $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ が与えられているとし, 集合族 $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で生成される σ-加法族を $\mathcal{X}$ とおく.
(1) $\mathcal{X}$ に属する集合の一般形を書け.
(2) $\mathcal{X}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測な関数 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ の一般形を書け.

問題 17 補題 3.4 において, $f^{-1}(\sigma[\mathcal{A}])$ が σ-加法族である.

問題 18 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が単調ならば $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測である.

問題 19 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が上半連続, 下半連続, 右連続, 左連続のどの場合も, $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測である.

問題 20 可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の実数値 $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測関数の列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対し,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n \to \infty} f_n, \quad \liminf_{n \to \infty} f_n$$

はすべて可測関数である.

4　測　度

測度空間

可測空間 $(X,\mathcal{F})$ 上の集合関数 $\mu:\mathcal{F}\longrightarrow[0,+\infty]$ が次をみたすとする.
(i) $\mu(\varnothing)=0$
(ii) 可算個の $A_1,A_2,A_3,\dots\in\mathcal{F}$ が互いに素ならば

$$\mu\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\qquad(\mu(A_n)=+\infty \text{ も OK}).$$

このとき, μ を $(X,\mathcal{F})$ 上の測度 (measure) (あるいは非負値 σ-加法的集合関数) という. $(X,\mathcal{F},\mu)$ を測度空間と呼ぶ. (ii) の性質を測度の σ-加法性という. 有限個を除いて A_n が $\varnothing$ の場合として有限加法性を含む. $\mu(X)<+\infty$ をみたす測度を有限測度と呼び, $\mu(X)=1$ をみたす測度を特に確率 (probability) と呼ぶ.

注意　4 ページの定理 2.4 を認めれば, そこで導入した Lebesgue 測度 m が $(\mathbb{R},\mathcal{L})$ 上の測度になる.

完備性

測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ が完備であるとは, $\mathcal{N}=\{A\subset X\,|\,\exists B\supset A,\ B\in\mathcal{F},\ \mu(B)=0\}\subset\mathcal{F}$ が成り立つこと, すなわち μ に関する零集合の部分集合がすべて可測になることである.

例 4.1 (1) (Dirac の) デルタ測度　(2) 個数測度　(3) 本質的無限測度

$$(1)\ \delta_x(A)=\begin{cases}1, & A\ni x\\ 0, & A\not\ni x\end{cases}\qquad (2)\ \mu(A)=\begin{cases}+\infty, & A\text{ が無限集合}\\ \sharp A, & A\text{ が有限集合}\end{cases}\qquad (3)\ \mu(A)=\begin{cases}+\infty, & A\neq\varnothing\\ 0, & A=\varnothing\end{cases}$$

命題 4.2 (測度の単調性と劣加法性) 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ において
(1) 単調性：　$A,B\in\mathcal{F},\ A\subset B$　ならば　$\mu(A)\leqq\mu(B)$.
(2) σ-劣加法性：　可算個の $A_1,A_2,A_3,\dots\in\mathcal{F}$　ならば　$\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\big)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$.

命題 4.3 (測度に関する単調収束定理) 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ において
(1) 可算個の $A_1,A_2,A_3,\dots\in\mathcal{F}$,　$A_n\subset A_{n+1}$　ならば　$\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\big)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.
(2) 可算個の $A_1,A_2,A_3,\dots\in\mathcal{F}$,　$A_n\supset A_{n+1}$ に対し, どこかの番号 N のところで $\mu(A_N)<+\infty$ ならば $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\big)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

ほとんどいたるところ

$\mu(E)=0$ なる集合 E を除いて成り立つ性質は, μ に関してほとんどいたるところ, μ-a.e.(= almost everywhere), 成り立つという. μ が確率のときには, 確率的ニュアンスを込めて μ-a.s. (= almost surely) という.
たとえば, 可測空間 $(X,\mathcal{B}(X))$ 上の関数 f について,　$\mu(\{f\text{ の不連続点 }\})=0\iff f$ が連続 (μ-a.e.).

測度空間の完備化

測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ に対し,
(i) $\overline{\mathcal{F}}=\{A\cup B\,|\,A\in\mathcal{F},\ B\subset\exists N,\ N\in\mathcal{F},\ \mu(N)=0\}$,　(ii) $\overline{\mu}(C)=\mu(A),\ C=A\cup B\in\overline{\mathcal{F}}$
とおくと, $(X,\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$ は完備な測度空間であり, $(X,\mathcal{F},\mu)$ の最小の拡張を与える. すなわち

• (拡張であること) : $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}, \quad \overline{\mu}\big|_{\mathcal{F}} = \mu$
• (最小性) : 測度空間 $(X, \mathcal{G}, \nu)$ が完備であって $(X, \mathcal{F}, \mu)$ の拡張ならば, $\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{G}, \ \nu\big|_{\overline{\mathcal{F}}} = \overline{\mu}$.
$(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ を $(X, \mathcal{F}, \mu)$ の完備化と呼ぶ.

定理 4.4 (Egorov の定理) 有限な測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上の実数値可測関数 f_n, f が $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (μ-a.e.) をみたすとすると,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists Y \in \mathcal{F}, \qquad \mu(X \setminus Y) \leqq \epsilon, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in Y} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (Y \text{ 上で一様収束}).$$

問題 21 命題 4.3 の (2) で, $\mu(A_N) < \infty$ となる N の存在の仮定を落としたときの反例. (個数測度を考える.)

問題 22 可算個の $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(A_n) = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ならば, $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = 0$.

問題 23 可算個の $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ の上極限集合と下極限集合

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(1) $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n \iff$ 無限個の n に対して $x \in A_n$.
(2) $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n \iff$ 有限個の n を除いて $x \in A_n$.
(3) $\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c$.
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ ならば $\mu\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 0$.

問題 24 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上の実数値可測関数 f, g に対し, $f = g$ (μ-a.e.) であるときに $f \sim g$ と表すことにする. $\sim$ は X 上の可測関数の集合に同値関係を定める.

問題 25 (像測度) 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$, 可測空間 $(Y, \mathcal{G})$, $\mathcal{F}/\mathcal{G}$-可測写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し,

$$\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)), \qquad B \in \mathcal{G}$$

とおくと, ν が $(Y, \mathcal{G})$ 上の測度になる. この ν を $f_*\mu$ と記して, f による μ の像測度 (または, 押し出し (push-forward)) という.

問題 26 可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の**有限な**測度 μ と可測関数列 $\{f_n\}$ に対し, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (μ-a.e.) ならば[*1],

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}\big) = 0. \qquad (*)$$

($(*)$ が成り立つとき, $\{f_n\}$ が f に μ に関して**測度収束**するといい, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in μ と記す.)

問題 27 可測関数列 $\{f_n\}$ が可測関数 f に μ に関して測度収束すれば, 適当な部分列 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ をとって $\lim_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ (μ-a.e.) とできる.

問題 28 8 ページの測度空間の完備化の手続きについて
(1) (i) で定めた $\overline{\mathcal{F}}$ が σ-加法族になる.
(2) (ii) によって $\overline{\mu}$ が矛盾なく定義される (well-defined).
(3) $\overline{\mu}$ が可測空間 $(X, \overline{\mathcal{F}})$ 上の測度になる.

[*1] f_n, f は実数値 (i.e.$\neq \pm\infty$) とし, f の $\mathcal{F}$-可測性または $(X, \mathcal{F}, \mu)$ の完備性を仮定する必要あり.

5 積　分

§2 で見たような関数の値域を分割して正項級数の性質を活用するという Lebesgue のアイデアに基づいて積分を定義する. 単関数による近似を系統的に用いて理論を整備した Saks の方法にしたがう.
この節を通して, 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ を 1 つ固定する.

広義実数値関数

正項級数は $+\infty$ も値に含めて考える方が便利なので, $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\sqcup\{-\infty,+\infty\}$ ($\mathbb{R}$ の 2 点コンパクト化) とおき, 可測空間 $(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ を考える. $f:X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ を X 上の広義実数値関数といい, $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-可測を単に "可測" と呼ぼう.

注意 $\overline{\mathbb{R}}$ における $\pm\infty$ がからんだ四則演算では,
$a\in\mathbb{R}$ に対して　$a+(+\infty)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty,\quad a+(-\infty)=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ など,
$a>0$ に対して　$a\cdot(+\infty)=(-a)\cdot(-\infty)=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ など,　そして (最も留意すべきは)

$$0\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot 0=0$$

と定める. $(+\infty)+(-\infty)$ は定義しない.

単関数

X 上の広義実数値可測関数で値域が有限集合であるものを単関数 (simple function) という. ただし, $+\infty$ と $-\infty$ をともに値域に含むものは除く. 値域が k-集合 $\{y_1,\cdots,y_k\}$ であるとすると,

$$f(x)=\sum_{j=1}^{k}y_jI_{E_j}(x),\qquad E_j=\{x\in X\,|\,f(x)=y_j\}.\tag{$\star$}$$

積分の定義 i)

$(\star)$ で表される非負の広義実数値単関数 f に対し,

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\sum_{j=1}^{k}y_j\,\mu(E_j)\quad(\leqq+\infty).\tag{$\star\star$}$$

注意 X の分割 $\{E_j\}$ を用いた単関数の表示式 $(\star)$ において $y_i=y_j$ $(i\neq j)$ となるものがあっても, 積分の式 $(\star\star)$ は成り立つ. その場合, μ の加法性から

$$y_i\,\mu(E_i\sqcup E_j)=y_i\,\mu(E_i)+y_j\,\mu(E_j)$$

が成り立つからである.

補題 5.1 非負単関数 f,g と $\alpha,\beta\geqq 0$ に対し,

$$\int_X(\alpha f(x)+\beta g(x))\mu(dx)=\alpha\int_X f(x)\mu(dx)+\beta\int_X g(x)\mu(dx).$$

積分の定義 ii)

非負の広義実数値可測関数 f に対し,

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\sup\Big\{\int_X g(x)\mu(dx)\,\Big|\,g\text{ は単関数},\ 0\leqq g(x)\leqq f(x)\Big\}\quad(\leqq\infty).$$

注意　f が非負単関数の場合, 積分の定義 ii) は i) と整合的である.

積分の定義 iii)
X 上の広義実数値可測関数 f に対し,

$$\int_X f^+(x)\mu(dx), \qquad \int_X f^-(x)\mu(dx) \tag{$\star\star\star$}$$

の少なくとも一方が有限値 ($< +\infty$) のとき, その差が広義実数値として定まるので,

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \int_X f^+(x)\mu(dx) - \int_X f^-(x)\mu(dx)$$

と定義する. このとき, f の**積分が意味をもつ**という. ($\star\star\star$) がともに有限値のとき, f は μ に関して**積分可能**(μ-integrable) という.

注意　積分可能性は, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ との類似で言うと,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- < +\infty$$

という絶対収束の場合を扱っていることになる.

補題 5.2　X 上の広義実数値可測関数 f と $A \in \mathcal{F}$ に対し, f の積分が意味をもてば $f I_A$ の積分が意味をもつ. f が積分可能ならば $f I_A$ も積分可能である.

可測集合上の積分の定義
f の積分が意味をもち, $A \in \mathcal{F}$ ならば,

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \int_X f(x) I_A(x)\mu(dx)$$

と定義する.

積分の性質として示すべき代表的なものは,
• 線型性：

$$\int_X \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\mu(dx) = \alpha \int_X f(x)\mu(dx) + \beta \int_X g(x)\mu(dx), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(詳しくは, 右辺が意味をもてば左辺も意味をもって $\cdots$ ということ)
• 収束定理 (項別積分, 極限と積分の順序交換)：

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx).$$

(もちろん然るべき条件のもとでの話).

記号の約束
可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の関数 f の測度 μ による積分を表す記号:

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f d\mu = \mu(f).$$

補題 5.3 f と g の積分がともに意味をもち, $f \leqq g$ ならば, $\int_X f(x)\mu(dx) \leqq \int_X g(x)\mu(dx)$. 特に, f の積分が意味をもてば,

$$\Big|\int_X f(x)\mu(dx)\Big| \leqq \int_X |f(x)|\mu(dx) \qquad \text{(三角不等式)}.$$

定理 5.4 (非負単調増加関数列の積分の収束定理) X 上の広義実数値非負可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加, すなわち $0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \cdots$ ならば,

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\mu(dx).$$

定理 5.5 (Fatou の補題) X 上の広義実数値非負可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx) \leqq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\mu(dx).$$

命題 5.6 (非負可測関数の積分の線型性) X 上の広義実数値非負可測関数 f, g と $\alpha, \beta \geqq 0$ に対し,

$$\int_X \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\mu(dx) = \alpha\int_X f(x)\mu(dx) + \beta\int_X g(x)\mu(dx).$$

系 5.7 (1) X 上の広義実数値関数 f に対し,

$$f \text{ が}\mu\text{に関して積分可能} \iff \int_X |f(x)|\mu(dx) < +\infty.$$

(2) X 上の広義実数値非負可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,

$$\int_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n(x)\mu(dx).$$

定理 5.8 (積分の線型性) X 上の広義実数値可測関数 f, g と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\int_X \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\mu(dx) = \alpha\int_X f(x)\mu(dx) + \beta\int_X g(x)\mu(dx). \qquad (\bigstar)$$

正確には, $\int_X f d\mu$, $\int_X g d\mu$, および ($\bigstar$) の右辺のすべてが意味をもてば ($\bigstar$) の左辺も意味をもち, 等式が成り立つ.
さらに, f, g が積分可能ならば $\alpha f + \beta g$ も積分可能で, ($\bigstar$) が成り立つ.

補題 5.9 (1) $f = 0$ (μ-a.e.) ならば $\int_X f d\mu = 0$.
(2) $f \geqq 0$ (μ-a.e.), $\int_X f d\mu = 0$ ならば $f = 0$ (μ-a.e.).
(3) $\forall A \in \mathcal{F}$, $\int_A f d\mu = 0$ ならば $f = 0$ (μ-a.e.).

命題 5.10 X 上の広義実数値可測関数 f, g が $f = g$ (μ-a.e.) をみたせば, $\int_X f d\mu$ が意味をもつことと $\int_X g d\mu$ が意味をもつことが同値であり, そのとき

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \int_X g(x)\mu(dx).$$

注意 命題 5.10 により, 10 ページの補題 5.1 から始まる積分についての一連の結果において, 可測関数に対する仮定をすべて “μ-a.e. に成立” に修正 (緩和) することができる. たとえば,
- 補題 5.3 : $f \leqq g$ (μ-a.e.)

- 定理 5.4 : $f_n \leqq f_{n+1}$ (μ-a.e.)
- 定理 5.5 : $f_n \geqq 0$ (μ-a.e.)　　など.

注意 測度 0 の除外集合について
各 $n \in \mathbb{N}$ について, 性質 $\mathrm{P}_n(x)$ が μ-a.e. に成立しているとする. すなわち, $N_n = \{x \in X \mid \mathrm{P}_n(x)\text{ が不成立 }\}$ とおくと, $\mu(N_n) = 0$. n ごとに除外集合 N_n は異なりうるが, $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ とおくと,

$$N_n \subset N \quad \text{かつ} \quad \mu(N) = 0.$$

したがって, 測度 0 の集合 N があって, $x \notin N$ ならば $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して性質 $\mathrm{P}_n(x)$ が成り立つ. つまり, **可算個**の測度 0 の除外集合は, 測度 0 を保ったまま**共通に**取り直せる. たとえば,

$$\begin{array}{cl} f_1 \leqq f_2 & \mu\text{-a.e.} \\ f_2 \leqq f_3 & \mu\text{-a.e.} \\ \cdots & \\ f_n \leqq f_{n+1} & \mu\text{-a.e.} \\ \cdots & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad f_1 \leqq f_2 \leqq \cdots \leqq f_n \leqq \cdots \quad \mu\text{-a.e.}$$

命題 5.11 (積分域に関する σ-加法性) X 上の可測関数 f, $A_n \in \mathcal{F}$, $A_m \cap A_n = \varnothing$ $(m \neq n)$ に対し,

$$\int_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\mu(dx).$$

正確には, 上式の左辺が意味をもてば, 右辺の各項およびそれらの和が意味をもち, 等式が成り立つ. 特に, $f \geqq 0$ (μ-a.e.) ならば, $\nu(A) = \int_A f d\mu$ によって測度 ν が定まる.

定理 5.12 (Levi の単調収束定理) X 上の広義実数値可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加, すなわち $f_n \leqq f_{n+1}$ (μ-a.e.) であって

$$\int_X f_1(x)\mu(dx) > -\infty$$

ならば

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx).$$

注意 定理 5.12 の積分と極限の順序交換は, 仮定を単調減少および $\int_X f_1 d\mu < \infty$ に置き換えても成り立つことはよいであろう. (f_n のかわりに $-f_n$ を考える.)

定理 5.13 (Lebesgue の優収束定理) X 上の広義実数値可測関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し,
- $\lim_{n\to\infty} f_n$ が μ-a.e. に存在
- X 上の積分可能な関数 g があって　$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqq g$ (μ-a.e.)

が成り立てば,

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx).$$

$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度の存在 (定理 2.4) はまだ示していないが, その存在を認めて少し議論を進めておく. $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を m で表す. 区間に対しては $m([a,b]) = b - a$ であった. Lebesgue 可測集合の定義は少しこみいっていたが, 開集合に対しては明快に定義された:

$$m(O) = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n), \qquad O = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_n \ (\text{互いに素な区間の可算合併}).$$

したがって, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$. また, m が完備 (8 ページ参照) であること, すなわち Lebesgue 測度 0 の集合の部分集合がすべて Lebesgue 可測であることも後に示される.

単関数の特別な場合として, 区間の定義関数の線型結合を**階段関数**と呼ぼう. 階段関数に対しては, Riemann 積分と Lebesgue 積分 (Lebesgue 測度 m に関する積分) が一致するのは明らかである.

定理 5.14 (Riemann 積分と Lebesgue 積分) $\mathbb{R}$ の有界区間 $[a,b]$ 上の有界な関数 f が Riemann 積分可能ならば, f は Lebesgue 測度 m に関して積分可能であって

$$\int_a^b f(x)dx \quad (\text{Riemann 積分}) \quad = \int_{[a,b]} f(x)m(dx) \quad (\text{Lebesgue 積分}).$$

注意 Lebesgue 測度に関する積分は普通単に

$$\int_{[a,b]} f(x)dx, \qquad \int_a^b f(x)dx$$

と書かれる. 後者の記法は, 1 点集合が Lebesgue 測度 0 であることに基づく.

問題 29 可測関数 $f : X \longrightarrow [0,+\infty]$ は, 非負単関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で下から単調に近似される. すなわち, $\exists$ 単関数 $f_n : X \longrightarrow [0,+\infty)$,

$$f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (\forall x \in X).$$

問題 30 広義実数値関数 f が μ に関して積分可能ならば, $-\infty < f < +\infty$ (μ-a.e.).

問題 31 $[0,1]$ 上の Lebesgue 測度に非負値関数に対する項別積分定理 (系 5.7 の (2)) を適用して

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \log 2.$$

問題 32 可測空間 $(X,\mathcal{F})$ 上の測度 μ と X 上の μ に関して積分可能な関数 f に対し,

$$\forall\epsilon > 0, \quad \exists\delta > 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad \mu(A) < \delta \implies \left|\int_A f(x)\mu(dx)\right| < \epsilon.$$

問題 33 (9 ページの問題 25 にある像測度の補足) 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$, 可測空間 $(Y,\mathcal{G})$, $\mathcal{F}/\mathcal{G}$-可測写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し, $\mathcal{G}^0 = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ とおく. $\mathcal{G}^0$ は $\mathcal{G}$ を含む σ-加法族であり, 像測度 $f_*\mu$ の定義は $\mathcal{G}^0$ まで自然に拡張される. このとき, $(X,\mathcal{F},\mu)$ が完備であれば, $(Y,\mathcal{G}^0,f_*\mu)$ も完備である.

問題 34 (抽象的な変数変換公式) 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$, 可測空間 $(Y,\mathcal{G})$, $\mathcal{F}/\mathcal{G}$-可測写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し, 前問のように像測度の空間 $(Y,\mathcal{G}^0,f_*\mu)$ を考える. Y 上の非負実数値 $\mathcal{G}^0$-可測関数 ϕ に対し,

$$\int_Y \phi(y)(f_*\mu)(dy) = \int_X \phi(f(x))\mu(dx). \tag{$**$}$$

注意 積分の定義のときのように, 非負とは限らない ϕ でも $\phi = \phi^+ - \phi^-$ とすれば, $(**)$ 式は (然るべき条件のもとに) 成り立つ. 関数の引き戻し (pull-back) の記号 $f^*(\phi) = \phi \circ f$ を用いて $(**)$ 式を次のようにも書ける:

$$\int_Y \phi\, d(f_*\mu) = \int_X f^*(\phi)d\mu.$$

6　L^1 空間

測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ に対し,

$$L^1(X, \mathcal{F}, \mu) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ が}\mu\text{に関して積分可能 } \}$$

とおく. $L^1(X, \mu) = L^1(\mu) = L^1(X) = L^1$ などと略記する.

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)| \mu(dx) \qquad (f \text{ の } L^1\text{-ノルム})$$

補題 6.1 (1) $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ は実線型空間である.
(2) $f, g \in L^1$　ならば　$\|f + g\|_1 \leqq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

注意　$f, g \in L^1(\mu)$ に対して $d(f, g) = \|f - g\|_1$ とおくと, $f, g, h \in L^1(\mu)$ に対し,

- $d(f, g) = d(g, f)$
- $d(f, g) \leqq d(f, h) + d(h, g)$
- $d(f, f) \geqq 0$
- $d(f, g) = 0 \iff f = g$　(μ-a.e.)

したがって, μ-a.e. に等しい元を**同一視**すれば, d は距離を与える. つまり $\mathcal{N} = \{ f \in L^1(\mu) \mid f = 0 \ (\mu\text{-a.e.}) \}$ とおけば, $L^1/\mathcal{N}$ 上で

$$d(f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N}) = d(f, g)$$

と距離が定義される. 次に示すことから, この $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)/\mathcal{N}$ は完備距離空間である (測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ が完備であるか否かによらず). μ-a.e. に等しい関数を同一視し, $L^1/\mathcal{N}$ を単に L^1 と記すこともある.

定理 6.2 (L^1 の完備性) $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ に属する関数の列 $\{f_n\}$ について次の条件が同値である.
(ア) $\exists f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$,　$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$.
(イ) $\{f_n\}$ が Cauchy 列,　すなわち　$\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\|_1 = 0$.

問題 35 (Chebyshev の不等式)　可測関数 f と $a > 0$ に対し,

$$\mu\bigl(\{ x \in X \bigm| |f(x)| \geqq a \}\bigr) \ \leqq \ \frac{1}{a} \int_X |f(x)| \mu(dx).$$

問題 36 可測関数列 $\{f_n\}$ が μ に関する測度的 Cauchy 列, すなわち

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \lim_{m,n\to\infty} \mu\bigl(\{ x \in X \bigm| |f_m(x) - f_n(x)| \geqq \epsilon \}\bigr) = 0$$

が成り立つとき, $\{f_n\}$ の適当な部分列 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ がある可測関数に μ-a.e. に収束する.

問題 37 Levi の単調収束定理 (定理 5.12) において, $\int_X f_1(x)\mu(dx) > -\infty$ の仮定をはずしたときの反例.

問題 38 Lebesgue の優収束定理 (定理 5.13) において, 一様可積分条件をはずしたときの反例.

第 III 章　測度の構成

7　Carathéodory の外測度による方法

§2 において, $\mathbb{R}$ の部分集合 A の Lebesgue 外測度

$$m^*(A) = \inf_{\text{open } O \supset A} m(O) \tag{$*$}$$

に言及した. これを抽象化した一般の外測度を導入し, そこから測度を導き出す Carathéodory の方法を述べる.

外測度

集合 X の部分集合全体を $\mathcal{P}(X)$ で表す. $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ が次の条件をみたすとき, μ^* を X 上の外測度と呼ぶ.
(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$
(ii) 単調性： $A \subset B$ ならば $\mu^*(A) \leqq \mu^*(B)$
(iii) σ-劣加法性： $\mu^*\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

例 7.1 上記 $(*)$ の m^* は $\mathbb{R}$ 上の外測度である.

外測度が測度になるには, σ-加法性:

$$A_1, A_2, A_3, \cdots \text{ が互いに素} \quad \Longrightarrow \quad \mu^*\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

が要請されるが, A_n が互いに素であっても, 外測度 μ^* が**任意の**部分集合についてこの σ-加法性をみたすとは限らない (実際, $(*)$ の m^* もそう). 集合族を適切に制限することを考える.

可測集合

外測度 $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ が与えられているとき, $A \subset X$ が μ^*-可測であるとは

$$\forall S \subset X, \qquad \mu^*(S) = \mu^*(A \cap S) + \mu^*(A^c \cap S)$$

が成り立つことをいう. 劣加法性から $\leqq$ は常に成り立つことに注意. μ^*-可測集合の全体を $\mathcal{F}_{\mu^*}$ と記す.

注意 (μ^*-可測性の式の意味)
たとえば, $X = [a, b] = I$ (有界区間), $\mu^* = m^*$ (Lebesgue 外測度) の場合. §2 で触れたように, A の Lebesgue 可測性は, A を内外からはかって一致すること:

$$m^*(A) = m_*(A) = |I| - m^*(A^c), \qquad \text{すなわち} \quad m^*(I) = m^*(A) + m^*(A^c)$$

であった. μ^*-可測性の式は, $\forall S \subset X$ に制限したときに A を内外からはかって一致することを意味している.

定理 7.2 (Carathéodory の基本定理) X 上の外測度 $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ に対し, μ^*-可測集合の全体 $\mathcal{F}_{\mu^*}$ は次の条件をみたす.
(1) $\mathcal{F}_{\mu^*}$ は σ-加法族である.
(2) $(X, \mathcal{F}_{\mu^*}, \mu^*\big|_{\mathcal{F}_{\mu^*}})$ は完備な測度空間である.

8　Hopf の拡張定理

可測空間 $(X,\mathcal{F})$ 上の測度を構成する際, 実践的には次のような状況がよく現れる.

• $\mathcal{F}=\sigma[\mathcal{E}]$, 　$\mathcal{E}$ は X の部分集合の**有限加法族**.

(つまり, $\mathcal{F}$ がある有限加法族 $\mathcal{E}$ で生成されることはわかっている.)

• $(X,\mathcal{E})$ 上に**有限加法的**な集合関数 $\lambda:\mathcal{E}\longrightarrow[0,+\infty]$ が定義されている.

このとき, $(X,\mathcal{E})$ 上の λ を $(X,\mathcal{F})$ 上の測度 μ に拡張したい: $\mu\big|_{\mathcal{E}}=\lambda$.

例 8.1 $\mathbb{R}^d$ の "区間塊" を考える:

$$\mathcal{E}=\Big\{E\subset\mathbb{R}^d\;\Big|\;E=\bigcup_{j=1}^{k}I_j,\ I_j:\text{区間}\Big\}\cup\{\varnothing\}.$$

$\mathcal{E}$ は有限加法族であり, $\sigma[\mathcal{E}]=\sigma[\mathcal{O}]=\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. $I=\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i]$ に対し, $\lambda(I)=\prod_{i=1}^{d}(b_i-a_i)$. 互いに素な合併には有限加法的に値を定め, $(\mathbb{R}^d,\mathcal{E})$ 上の有限加法的な λ を得る. 実は, これを $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の測度 m に拡張したものが, d 次元 Lebesgue 測度 (の Borel 集合族への制限) にほかならない.

定理 8.2 (Hopf の拡張定理) 集合 X の有限加法族 $\mathcal{E}\subset\mathcal{P}(X)$ の上で有限加法的な集合関数 $\lambda:\mathcal{E}\longrightarrow[0,+\infty]$ が与えられたとき, λ の $\mathcal{F}=\sigma[\mathcal{E}]$ への拡張について, 次のことが成り立つ.

[**存在**] 次の 2 つの条件が同値である.

(ア) $(X,\mathcal{F})$ 上の測度 μ があって, $\mu\big|_{\mathcal{E}}=\lambda$.

(イ) λ が $\mathcal{E}$ の上で σ-加法的. すなわち, 可算個の $E_1,E_2,\cdots\in\mathcal{E}$ が互いに素で $\bigsqcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathcal{E}$ ならば,

$$\lambda\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n).$$

[**一意性**] λ が **σ-有限**, すなわち

$$\exists X_1,X_2,\cdots\ (\text{可算個})\ \in\mathcal{E},\qquad\lambda(X_n)<+\infty,\quad X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$$

ならば, 拡張 μ は一意的である.

系 8.3 有限加法族 $\mathcal{E}$ の上で有限加法的な集合関数 λ が $\lambda(X)<+\infty$ をみたせば, 次の条件のもとで, $\mathcal{F}=\sigma[\mathcal{E}]$ 上の測度への拡張の存在と一意性が成り立つ:

$$\text{可算個の } E_1,E_2,\cdots\in\mathcal{E},\ E_1\supset E_2\supset\cdots(\text{単調減少}),\ \bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\lambda(E_n)=0.$$

問題 39 (σ-有限性をはずして拡張の一意性がくずれる例) $[0,1]$ 上で, 8 ページの例 4.1 に挙げた個数測度を ν_1, 本質的無限測度を ν_2 とする. ν_1,ν_2 はともに, 区間の有限合併全体のなす有限加法族 $\mathcal{E}$ 上の次のような有限加法的な λ の $\mathcal{B}([0,1])$ への拡張である:

$$\lambda(I)=\begin{cases}+\infty, & I:\text{区間}\neq\varnothing\\ 0, & I=\varnothing.\end{cases}$$

9 Lebesgue 測度

$\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度を定義する．出発点は, 有界区間 $I=\prod_{i=1}^d[a_i,b_i]$ の "体積": $|I|=\prod_{i=1}^d(b_i-a_i)$ である．17 ページの例 8.1 のように, 区間塊からなる有限加法族 $\mathcal{E}$ には自然にこの定義が拡張され, 有限加法的な λ を得る．$\mathcal{E}$ は $\mathbb{R}^d$ の Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ を生成する．$(\mathbb{R}^d,\mathcal{E})$ 上の有限加法的な λ を測度に拡張するには, これまでに述べた次の方法が使える．

(ア) λ は σ-有限だから, $\mathcal{E}$ の上でλがσ-加法的である ことが示されれば, Hopf の拡張定理 (定理 8.2) によって, λ を $\sigma[\mathcal{E}]=\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上へ拡張した測度 m_B が得られる．測度空間 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),m_B)$ の完備化 (8 ページ) を考え, $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}=\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, $\overline{m_B}=m$ とおく．$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ が $\mathbb{R}^d$ の Lebesgue 可測集合の全体, m が d 次元 Lebesgue 測度である．下線部の証明について, 有界な区間に対しては補題 2.3 の (2) の証明で実質的に済んでいる．そこでもコンパクト性にうったえる議論に帰着した．

(イ) $\mathbb{R}^d$ の開集合は互いに素な可算個の有界区間の合併で表されるので, λ の定義は開集合にも自然に与えられ, 16 ページの $(*)$ のようにして $\mathbb{R}^d$ 上の外測度 m^* が定義される (例 7.1). 任意の区間 I が m^*-可測であり, $m^*(I)=|I|$ が成り立つ ことが示されれば, Carathéodory の基本定理 (定理 7.2) によって区間をすべて含む σ-加法族 $\mathcal{F}_{m^*}$ が特定され, 完備な測度空間 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{F}_{m^*},m^*\big|_{\mathcal{F}_{m^*}})$ を得る．$m^*\big|_{\mathcal{F}_{m^*}}$ が λ の拡張であることはただちにわかる．実際, $\mathcal{F}_{m^*}=\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, $m^*\big|_{\mathcal{F}_{m^*}}=m$ が成り立ち, d 次元 Lebesgue 測度が得られる．下線部の証明は, Hopf の拡張定理 (定理 8.2) の [存在] の証明と同じ要領であるが, そこで λ の σ-劣加法性を使うので, 結局 (ア) の議論にもどる．

(ア), (イ) の下線部はともに, 一見すると半ば自明のことのように思えるかもしれないが, 図形的な直観に頼らずに論理的に証明するのは結構煩雑である．

(ウ) ここでは, Hopf の拡張定理 (系 8.3) の形を活かして, コンパクト性を使う議論がより見やすい証明によって λ を拡張した測度をつかまえることにする．系 8.3 は**有限な**測度の場合を記述するので, まず有界区間上の Lebesgue 測度を構成し, **σ-有限に拡張**する．

$\mathbb{R}^d$ の有界閉区間 $J=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]$, $\qquad -\infty<a_i<b_i<+\infty \quad (i=1,\cdots,d)$
$\mathcal{E}_J=\left\{E\subset J \;\middle|\; E=\bigcup_{j=1}^k I_j,\ I_j:\text{区間}\right\}\cup\{\varnothing\}$
とおくと, $\mathcal{E}_J$ は有限加法族であり, $\sigma[\mathcal{E}_J]=\mathcal{B}(J)$ (J の Borel 集合族)．区間 $I=\prod_{i=1}^d[\alpha_i,\beta_i]\subset J$ に対して

$$\lambda_J(I)=\prod_{i=1}^d(\beta_i-\alpha_i). \tag{$**$}$$

$\mathcal{E}_J$ に属する集合 A は J に含まれる互いに素な区間の有限合併で $A=\bigsqcup_{n=1}^N I_n$ のように表されるから,

$$\lambda_J(A)=\sum_{n=1}^N\lambda(I_n)$$

とおく．この値は well-defined であり (つまり I_n のとり方によらず A のみで決まる), λ_J が $\mathcal{E}_J$ 上の有限加法的非負値集合関数を与える．λ_J は有限, すなわち $\lambda_J(J)<+\infty$ をみたす．

補題 9.1 $E_1,E_2,\dots\in\mathcal{E}_J,\ E_1\supset E_2\supset\cdots,\ \bigcap_{n=1}^\infty E_n=\varnothing$ ならば

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_J(E_n)=0.$$

補題 9.1 により, Hopf の拡張定理 (定理 8.2) が適用できて, 可測空間 $(J, \mathcal{B}(J))$ 上の測度 m_J で, $m_J\big|_{\mathcal{E}_J} = \lambda_J$ をみたすものが一意的に存在する. 特に, 区間 $I \subset J$ の測度の値は $m_J(I) = (**)$ をみたす.

補題 9.2 可測空間 $(X, \mathcal{F})$ において, $X_1, X_2, X_3, \cdots \in \mathcal{F}$, $X_n \subset X_{n+1}$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ とし,
$\mathcal{F}_n = \{A \in \mathcal{F} \mid A \subset X_n\}$ $(= \{A \cap X_n \mid A \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{F}_{n+1})$ とおく.
各可測空間 $(X_n, \mathcal{F}_n)$ 上に測度 μ_n があって $\mu_n\big|_{\mathcal{F}_m} = \mu_m$ $(m \leqq n)$ が成り立つとする. このとき,

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A \cap X_n) \quad (\leqq +\infty), \qquad A \in \mathcal{F}$$

とおくと, μ は $(X, \mathcal{F})$ 上の測度になる. 特に μ_n が有限な測度ならば, μ が σ-有限である.

Lebesgue 測度

可測空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ において, $J_n = [-n, n] \times \cdots \times [-n, n]$ (d 直積) $\subset \mathbb{R}^d$ とおくと, $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, $\mathcal{B}(J_n) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mid A \subset J_n\}$ である. したがって, 測度空間の列 $\{(J_n, \mathcal{B}(J_n), m_{J_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ に補題 9.2 を適用することができ, $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の σ-有限な測度 m^d が得られる. $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の測度で区間 I に値 $|I|$ を割り当てるものは, この m^d と一致する. 測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m^d)$ を完備化したものを $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), m^d)$ で表し, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ に属する集合を **Lebesgue 可測集合**と呼ぶ. m^d を $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上あるいは $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d))$ 上の d 次元 **Lebesgue 測度**と呼ぶ.

定理 9.3 (1) Lebesgue 測度 m^d は $\mathbb{R}^d$ の中の平行移動で不変である. すなわち

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \qquad m^d(A + x) = m^d(A).$$

(2) 相似変換に対しては

$$\forall \alpha > 0, \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \qquad m^d(\alpha A) = \alpha^d m^d(A).$$

系 9.4 f の積分が意味を持てば,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) m^d(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) m^d(dx), && y \in \mathbb{R}^d, \\
\int_{\mathbb{R}^d} f(\alpha x) m^d(dx) &= \frac{1}{\alpha^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) m^d(dx), && \alpha > 0.
\end{aligned}$$

定理 9.5 (Lebesgue 測度の正則性) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, $m^d(A) < +\infty$ ならば,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists K : \text{コンパクト集合}, \ \exists O : \text{開集合}, \quad K \subset A \subset O, \quad m^d(O \setminus K) < \epsilon.$$

定理 9.6 (Lusin の定理) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測関数 f と $m^d(E) < +\infty$ なる $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ に対し,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists K : \text{コンパクト集合} \subset E, \qquad m^d(E \setminus K) < \epsilon, \quad f\big|_K \text{が連続関数}.$$

コンパクト台をもつ連続関数

$C_c(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}, \ [a,b]^c \text{上で } f = 0 \ (\exists [a,b])\}$
$C_c(\mathbb{R})$ に属する関数は ($[a,b]$ に制限して)Riemann 積分可能だから, 定理 5.14 によって Lebesgue 測度 m に関して積分可能である. したがって

$$C_c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}, m).$$

定理 9.7 $\forall f \in L^1(\mathbb{R}, m)$, $\forall \epsilon > 0$ に対し, $\exists g \in C_c(\mathbb{R})$, $\|f - g\|_1 \leqq \epsilon$. すなわち, $C_c(\mathbb{R})$ は $L^1(\mathbb{R}, m)$ の中で稠密である.

注意　定理 9.7 の証明では, $\mathbb{R}$ と Lebesgue 測度 m の次の性質が用いられる.

- 可測集合が外側から開集合で近似できること
- 開集合が互いに素な区間の可算合併で表されること
- 区間の定義関数が連続関数で L^1-近似できること

Lebesgue–Stieltjes 測度

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が単調増加で右連続とする.

- $f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ と $f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ がともに存在するとき,

$$\lambda\big((a,b]\big) = f(b) - f(a), \quad \lambda\big((a,+\infty)\big) = f(+\infty) - f(a), \quad \lambda\big((-\infty,b]\big) = f(b) - f(-\infty), \qquad -\infty < a < b < +\infty$$

とおき, 有限左開右閉区間 $(a,b]$ と半無限区間 $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$ の有限合併全体のなす有限加法族 $\mathcal{J}$ 上に λ を有限加法的に定める. $\lambda(\mathbb{R}) = f(+\infty) - f(-\infty)$. このとき, Hopf の拡張定理 (系 8.3) が適用できて, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の有限な測度 m_f で λ の拡張になるものが得られる. 特に

$$m_f\big((a,b]\big) = f(b) - f(a) \qquad (-\infty \leqq a < b \leqq +\infty). \tag{$\star$}$$

- f が下または上に有界でなければ, Lebesgue 測度の構成のときのように, まず $[-n,n]$ 上の測度を系 8.3 を用いてつくり, 補題 9.2 によって σ-有限な測度に拡張すればよい. この場合も $(\star)$ が成り立つ.

このように単調増加右連続関数 f の増分からできる $\mathbb{R}$ 上の測度を f に関する Lebesgue–Stieltjes 測度あるいは単に Stieltjes 測度と呼ぶ. $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度は, $f(x) = x$ という特別な場合である.

注意　$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が単調増加のとき, $\tilde{f}(x) = \lim_{y\downarrow x} f(y)$ とおくと, $\tilde{f}$ が単調増加右連続になる.

Cantor 集合

まず $[0,1]$ を 3 等分して真中の $(1/3, 2/3)$ を除いた閉区間 2 個の和 K_1. 次に K_1 のそれぞれの閉区間の真中 $(1/9, 2/9)$, $(7/9, 8/9)$ を除いた 4 個の閉区間の和 K_2. 以下同様に, 2^n 個の閉区間の和 K_n. このとき, $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ を Cantor(の 3 進) 集合という. $x \in [0,1]$ を 3 進展開し, 末尾が 1 で終る有限小数のときには, 末尾の 1 を $022\cdots$ と書き直しておくと,

$$K = \big\{x \in [0,1] \mid x = 0.x_1x_2x_3\cdots,\ x_i \in \{0,2\}\big\}.$$

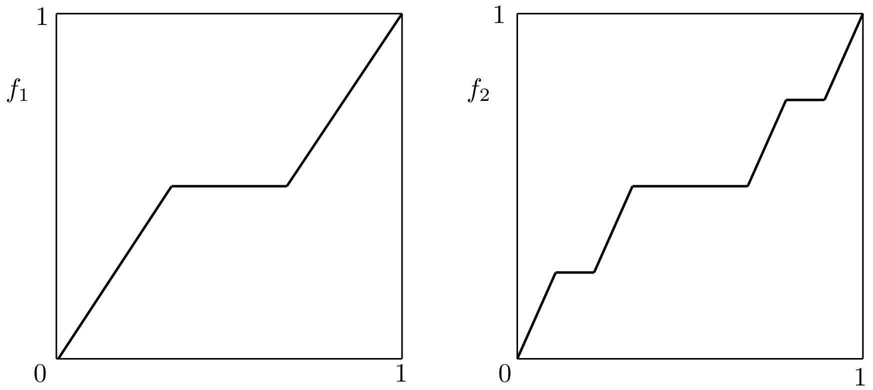
命題 9.8 Cantor 集合 K は, コンパクト, Lebesgue 測度 0, 連続濃度の集合である.

Cantor 関数 (Lebesgue 関数)

Cantor 集合 $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ を定義したところで, 各 n について単調増加な折れ線関数 f_n を次のように定める (下図は f_1 と f_2): K_n^c の各閉区間上で定数, K_n の各閉区間上では同一の傾きの 1 次関数, $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$. そうすると, f_n は $n \to \infty$ で一様収束し, その極限 C は単調増加な連続関数である. C を Cantor 関数または Lebesgue 関数という.

問題 40 $\mathbb{R}$ 上の実数値単調増加関数の不連続点は高々可算個である.

問題 41 (1) 単調増加な $f \in C^1(\mathbb{R})$ に関する Stieltjes 測度 m_f を求めよ.
(2) 右連続単調増加関数 f に対し, Stieltjes 測度の開区間での値 $m_f((a,b))$ を f の値によって表せ.



問題 42 $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の有限な測度 μ に対し, $f(x)=\mu((-\infty,x])$ とおくと, f が右連続単調増加関数であり, $m_f=\mu$.

問題 43 20 ページの Cantor 関数のところに挙げた f_n が $n\to\infty$ で一様収束する.

問題 44 $[0,1]$ 上の Cantor 関数 C に関する Stieltjes 測度 m_C について
(1) $m_C(K)=1$, したがって $m_C(K^c)=0$. ただし, K は Cantor 集合.
(2) $\forall x\in[0,1], \quad m_C(\{x\})=0$.
(m_C は特異連続な測度の例である.)

問題 45 $f\in L^1(\mathbb{R})$ (Lebesgue 測度に関して) ならば,

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|dx=0.$$

問題 46 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 上の非負実数値可測関数 f に対し, $g(t)=\mu\bigl(\{x\in X\,|\,f(x)>t\}\bigr)$ とおく.
(1) $g(t)<+\infty$ $(\forall t>0)$ とし, $t\in(0,+\infty)$ が g の連続点ならば, $g(t)=\mu\bigl(\{x\in X\,|\,f(x)\geqq t\}\bigr)$.
(2) $\int_0^{+\infty}\mu\bigl(\{x\in X\,|\,f(x)>t\}\bigr)dt=\int_0^{+\infty}\mu\bigl(\{x\in X\,|\,f(x)\geqq t\}\bigr)dt$.

問題 47 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 上の非負実数値可測関数 f に対し,

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\int_0^{+\infty}\mu\bigl(\{x\in X\,|\,f(x)>t\}\bigr)dt=\int_0^{+\infty}\mu\bigl(\{x\in X\,|\,f(x)\geqq t\}\bigr)dt.$$

問題 48 (自習課題)
(1) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ の濃度は $\aleph$(=連続濃度) であり, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ の濃度は $2^{\aleph}$ である. 特に, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\subsetneqq\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.
(2) Lebesgue 可測でない $\mathbb{R}$ の部分集合の例.
(3) $\mathbb{R}$ の部分集合 A の Lebesgue 測度が正ならば, $A-A=\{x-y\,|\,x,y\in A\}$ が内点を含む.

第 IV 章　重積分

10　直積測度

2 次元 Lebesgue 測度 m^2 と 1 次元 Lebesgue 測度の直積 $m^1 \times m^1$ の関係?
実は,（$(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), m^2)$ は $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}), m^1 \times m^1)$ の完備化.

可測空間の直積

可測空間 $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$　　　自然な射影　$p_X : X \times Y \longrightarrow X$,　$p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$
$p_X^{-1}(\mathcal{F}) = \{A \times Y \mid A \in \mathcal{F}\}$,　$p_Y^{-1}(\mathcal{G}) = \{X \times B \mid B \in \mathcal{G}\}$
$p_X^{-1}(\mathcal{F})$ と $p_Y^{-1}(\mathcal{G})$ を含む最小の σ-加法族 ($\iff$ p_X と p_Y を可測にするような最小の σ-加法族) を $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ と書く. 可測空間 $(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$ を $(X, \mathcal{F})$ と $(Y, \mathcal{G})$ の直積可測空間という. $A \times B$ $(A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G})$ の形の集合 ($X \times Y$ の可測長方形ともいわれる) の有限合併全体のなす有限加法族を $\mathcal{E}$ とおくと (問題 49 を参照),

$$\mathcal{F} \times \mathcal{G} = \sigma[p_X^{-1}(\mathcal{F}) \cup p_Y^{-1}(\mathcal{G})] = \sigma[\mathcal{E}].$$

集合の切り口 (section)

$A \subset X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$ に対し,　$A(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}$　(x-切り口),　$A(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in A\}$ (y-切り口).

補題 10.1 直積可測空間 $(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$ において, 可測集合の切り口は可測である. すなわち,
$A \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$　ならば,　　$\forall x \in X,\ A(x) \in \mathcal{G}$,　$\forall y \in Y,\ A(y) \in \mathcal{F}$.

系 10.2 可測空間 $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$, $(Z, \mathcal{H})$ において, $f : X \times Y \longrightarrow Z$ が $(\mathcal{F} \times \mathcal{G})/\mathcal{H}$-可測ならば,
$\forall x \in X$,　$f(x, \cdot)$ が $\mathcal{G}/\mathcal{H}$-可測,　　　$\forall y \in Y$,　$f(\cdot, y)$ が $\mathcal{F}/\mathcal{H}$-可測.

可測空間の n 個の直積

可測空間 $(X_k, \mathcal{F}_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$,　　第 k 因子への射影 $p_k : X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_k$,
$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \cdots \mathcal{F}_n$ は $p_1, p_2, \cdots, p_n$ をすべて可測にする最小の σ-加法族.

測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ に対し, 直積可測空間 $(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$ 上に測度の直積 $\mu \times \nu$ を定義したい. 可測長方形に対しては

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \qquad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}$$

と定め, 互いに素な有限合併には有限加法的になるように定義を広げる.

定理 10.3 (直積測度の一意性) 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ がともに σ-有限であるとき, 直積可測空間 $(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$ 上に

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \qquad A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}$$

をみたす測度 $\mu \times \nu$ が存在すれば一意的である. その $\mu \times \nu$ は σ-有限になる.

Hopf の拡張定理の “存在” のための条件を直接チェックするのはやや煩雑になるので, 積分を援用しよう. その準備として, 積分の単調収束定理を使いやすくするため, σ-加法族の特徴づけを 1 つ与える.

単調族

集合 X の部分集合族 $\mathcal{A}$ が単調族であるとは, 次の 2 つの条件をみたすこと:

可算個の $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$,

可算個の $B_1, B_2, \cdots \in \mathcal{A}$, $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ ならば $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$.

$\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して $\mathcal{A}$ を含む最小の単調族 ($\mathcal{A}$ が生成する単調族という) が存在するから, それを $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ と書く. σ-加法族は当然単調族であるから, $\mathcal{M}[\mathcal{A}] \subset \sigma[\mathcal{A}]$ は常に成り立つ.

定理 10.4 (単調族定理) $\mathcal{A}$ が有限加法族ならば, $\mathcal{M}[\mathcal{A}] = \sigma[\mathcal{A}]$ が成り立つ.

補題 10.5 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ がともに σ-有限であるとき, $\forall A \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ に対し, $\nu(A(x))$ が $\mathcal{F}$-可測, $\mu(A(y))$ が $\mathcal{G}$-可測であり,

$$\int_X \nu(A(x))\mu(dx) = \int_Y \mu(A(y))\nu(dy). \tag{$\star$}$$

注意 定義関数を用いると, $I_{A(y)}(x) = I_{A(x)}(y) = I_A(x, y)$ だから, $(\star)$ は

$$\int_X \Big(\int_Y I_A(x, y)\nu(dy) \Big) \mu(dx) = \int_Y \Big(\int_X I_A(x, y)\mu(dx) \Big) \nu(dy) \tag{$\star'$}$$

と書き直せる.

定理 10.6 (直積測度の存在) 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ がともに σ-有限であるとき,

$$(\mu \times \nu)(A) = \int_X \nu(A(x))\mu(dx) = \int_Y \mu(A(y))\nu(dy), \qquad A \in \mathcal{F} \times \mathcal{G} \tag{$\star\star$}$$

によって直積可測空間 $(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$ 上の σ-有限な測度 $\mu \times \nu$ が定まる. 特に, 可測長方形に対して

$$(\mu \times \nu)(F \times G) = \mu(F)\nu(G), \qquad F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}. \tag{$\star\star\star$}$$

記号の注意 • 直積測度 $\mu \times \nu$ に関する積分について

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\, (\mu \times \nu)(dxdy) = \int_{X \times Y} f(x, y)\, d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu).$$

• 測度の積記号について

$A \subset X$, $B \subset Y$ で, $f(x, y) = I_A(x)I_B(y)$ のとき,

$$\int_{X \times Y} I_A(x)I_B(y)(\mu \times \nu)(dxdy) = (\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \Big(\int_X I_A(x)\mu(dx) \Big) \Big(\int_Y I_B(y)\nu(dy) \Big).$$

2 変数関数としては, $I_A(x)I_B(y) = (I_A \otimes I_B)(x, y)$ がよく使われるので,

$$\int_{X \times Y} (I_A \otimes I_B) d(\mu \times \nu) = \int_X I_A d\mu \cdot \int_Y I_B d\nu.$$

こういうふうに関数の空間 $\mathrm{Fun}(X \times Y) \cong \mathrm{Fun}(X) \otimes \mathrm{Fun}(Y)$ にはたらく線型汎関数だと見れば, 直積測度を表すのに $\mu \times \nu$ のかわりに $\mu \otimes \nu$ という記号を使うのも自然である.

例 10.7 (測度の合成積 (convolution)) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の σ-有限な測度 μ, ν に対し, $\Phi(x, y) = x + y$ で定まる $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測写像 $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ によって直積測度の像測度 (9 ページの問題 25)

$$\Phi_*(\mu \times \nu) = \mu * \nu$$

をとる. これを μ と ν の合成積という.

問題 49 $\{A \times B \,|\, A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\}$ に属する集合の有限合併の全体は, 有限加法族である.

問題 50 22 ページの系 10.2.

問題 51 (1) 位相空間 X と Y の直積 $X \times Y$ に積位相 (すなわち X への射影 p_X と Y への射影 p_Y をともに連続にするような最弱の位相) を入れると, Borel 集合族に対し, $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$.
(2) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

問題 52 (σ-有限性をはずしたときの直積測度の存在の反例) 可測空間 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ 上に $\mu =$Lebesgue 測度 m^1 と個数測度 ν を考え, A として対角線 $\{(x,x) \,|\, x \in [0,1]\} \in \mathcal{B}([0,1] \times [0,1])$ をとったとき, 補題 10.5 の $(\star)$ 式が成り立たない.

問題 53 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の σ-有限な測度 μ, ν に対し,

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A - x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - y)\nu(dy), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の σ-有限な測度 n を $n(\{k\}) = 1$ $(k \in \mathbb{Z})$, $n(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = 0$ で定めると, $n * n$ が σ-有限でない.

11 Fubini の定理

直積測度の定義の根拠になった補題 10.5 の $(\star')$ 式を, $A \in \mathcal{F}\times\mathcal{G}$ の定義関数 I_A から $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$-可測関数に拡張すると, "累次積分" の公式が得られる.

定理 11.1 (Fubini の定理: 非負可測関数, 完備化前) 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ と $(Y,\mathcal{G},\nu)$ がともに σ-有限であるとすると, 非負 $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$-可測関数 f に対して次のことが成り立つ.
(1) $\forall x \in X$, $f(x,\cdot\,)$ が $\mathcal{G}$-可測.　さらに, $\int_Y f(x,y)\nu(dy)$ が $\mathcal{F}$-可測.
(2) $\forall y \in Y$, $f(\,\cdot\,,y)$ が $\mathcal{F}$-可測.　さらに, $\int_X f(x,y)\mu(dx)$ が $\mathcal{G}$-可測.
(3) 重積分の順序交換

$$\int_{X\times Y} f(x,y)(\mu\times\nu)(dxdy) = \int_X\Big(\int_Y f(x,y)\nu(dy)\Big)\mu(dx) = \int_Y\Big(\int_X f(x,y)\mu(dx)\Big)\nu(dy). \tag{F}$$

定理 11.2 (Fubini の定理: 積分可能関数, 完備化前) 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ と $(Y,\mathcal{G},\nu)$ がともに σ-有限であるとし, $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$-可測関数 f が $\mu\times\nu$-積分可能であるとすると, 次のことが成り立つ.
(1) μ-a.e. $x \in X$, $f(x,\cdot\,)$ が ν-積分可能.　さらに, $\int_Y f(x,y)\nu(dy)$ が μ-積分可能.
(2) ν-a.e. $y \in Y$, $f(\,\cdot\,,y)$ が μ-積分可能.　さらに, $\int_X f(x,y)\mu(dx)$ が ν-積分可能.
(3) 重積分の順序交換 (F) 式.

定理 11.3 (Fubini–Tonelli の定理: 完備化前) 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ と $(Y,\mathcal{G},\nu)$ がともに σ-有限であるとする. $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$-可測関数 f に対し,

$$\int_{X\times Y}|f(x,y)|(\mu\times\nu)(dxdy),\quad \int_X\Big(\int_Y |f(x,y)|\nu(dy)\Big)\mu(dx),\quad \int_Y\Big(\int_X |f(x,y)|\mu(dx)\Big)\nu(dy)$$

の 3 つの積分のうちのどれか 1 つが有限値ならば他の 2 つも有限値になり, 3 つの積分値が一致する. このとき, f に対する重積分の順序交換の (F) 式も成り立つ.

測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ と $(Y,\mathcal{G},\nu)$ がともに完備であっても, その直積 $(X\times Y,\mathcal{F}\times\mathcal{G},\mu\times\nu)$ が完備とは限らない (この節の問題 54). 以下, 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ の完備化を $(X,\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$ で表す: $\overline{\mu}\big|_{\mathcal{F}} = \mu$.

補題 11.4 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ と $(Y,\mathcal{G},\nu)$ がともに σ-有限かつ完備であるとする. $(\mu\times\nu)(N)=0$ なる $N \in \mathcal{F}\times\mathcal{G}$ をとる. このとき, $A \subset N$ の切り口について
- μ-a.e. $x \in X$,　$A(x) \in \mathcal{G}$ であって $\nu(A(x)) = 0$,
- ν-a.e. $y \in Y$,　$A(y) \in \mathcal{F}$ であって $\mu(A(y)) = 0$.

定理 11.5 (Fubini の定理: 非負可測関数, 完備化後) 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ と $(Y,\mathcal{G},\nu)$ がともに σ-有限かつ完備であるとする. 非負 $\overline{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}$-可測関数 f に対して次のことが成り立つ.
(1) μ-a.e. $x \in X$,　$f(x,\cdot\,)$ が $\mathcal{G}$-可測関数.
(1′) ν-a.e. $y \in Y$,　$f(\,\cdot\,,y)$ が $\mathcal{F}$-可測関数.
(2) $\int_Y f(x,y)\nu(dy)$ が $\mathcal{F}$-可測関数.
(2′) $\int_X f(x,y)\mu(dx)$ が $\mathcal{G}$-可測関数.
(3) 重積分の順序交換

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\overline{\mu\times\nu}(dxdy) = \int_X\Big(\int_Y f(x,y)\nu(dy)\Big)\mu(dx) = \int_Y\Big(\int_X f(x,y)\mu(dx)\Big)\nu(dy). \tag{$\bar{\mathrm{F}}$}$$

定理 11.6 (Fubini の定理: 積分可能関数, 完備化後) 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ がともに σ-有限かつ完備であるとする. $\overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$-可測関数 f が $\overline{\mu \times \nu}$-積分可能ならば, 次のことが成り立つ.

(1) μ-a.e. $x \in X, \quad f(x, \cdot)$ が $\mathcal{G}$-可測で ν-積分可能.

(1′) ν-a.e. $y \in Y, \quad f(\cdot, y)$ が $\mathcal{F}$-可測で μ-積分可能.

(2) $\int_Y f(x,y)\nu(dy)$ が $\mathcal{F}$-可測で μ-積分可能.

(2′) $\int_X f(x,y)\mu(dx)$ が $\mathcal{G}$-可測で ν-積分可能.

(3) 重積分の順序交換 $(\bar{\mathrm{F}})$ 式.

定理 11.7 (Fubini–Tonelli の定理: 完備化後) 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ がともに σ-有限かつ完備であるとする. $\overline{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$-可測関数 f について,

$$\int_{X \times Y} |f(x,y)| \overline{\mu \times \nu}(dxdy), \quad \int_X \Big(\int_Y |f(x,y)| \nu(dy) \Big) \mu(dx), \quad \int_Y \Big(\int_X |f(x,y)| \mu(dx) \Big) \nu(dy)$$

の 3 つの積分のうちのどれか 1 つが有限値ならば他の 2 つも有限値になり, 3 つの積分値が一致する. このとき, f に対する重積分の順序交換の $(\bar{\mathrm{F}})$ 式も成り立つ.

問題 54 $\mathbb{R}$ の Lebesgue 非可測集合の存在と直積可測空間の切り口の可測性 (補題 10.1) を用いて, $\mathbb{R}^2$ の Lebesgue 測度 0 をもつ Borel 集合の部分集合で $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R})$-可測でない集合をつくる.