解析学 F (金曜 1 講時) **レポート問題** 2018 JAN

- 提出先は, 数学事務室前のレポートボックス.
- 提出締切は, 2018(H30) 年 **2 月 5 日（月）16:00**.

問題 1. 公平なコイン投げを記述する実確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$ と確率 P を考える．すなわち, $X_1, X_2, \cdots$ は独立であって $P(X_j = 0) = P(X_j = 1) = 1/2$ をみたすとする．中間試験にも出題したように, $0 < x \leqq 1$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty}\Big\{-\frac{1}{n}\log P\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2} \geqq \frac{x}{2}\Big)\Big\} = \frac{1}{2}\big\{(1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x)\big\}$$

が成り立つ．このこととボレル・カンテリの補題を用いて,

$$P\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{2}\Big) = 1$$

が成り立つことを示しなさい.

問題 2. 公平なコイン投げを記述する実確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$ と確率 P を考える．すなわち, $X_1, X_2, \cdots$ は独立であって $P(X_j = 0) = P(X_j = 1) = 1/2$ をみたすとする．実確率変数

$$\sqrt{n}\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\Big)$$

の特性関数の $n \to \infty$ での各点極限を計算しなさい．また, それがどのような確率分布の特性関数であるかを述べなさい.

♣ 問題 3 は, 3-1 と 3-2 のどちらかを選んで解答しなさい.

問題 3-1. 壺数 2, 球数 4 のエーレンフェストの壺モデルを表すマルコフ連鎖 (X_n) を考える．初期分布は 4 個の球全部がどちらかの壺にあるものとして, 時刻 n における X_n の分布を求めなさい. さらに, $n \to \infty$ での分布の状況を記述しなさい．(注：推移行列はスカスカの 5 次行列なので手計算が望ましいですが, 数式処理ソフトを援用してもかまいません．その場合は, どういう量を計算すればどうなったかを詳しく説明してください．プログラムを示されても私は十分わかりません.)

問題 3-2. 高々可算な集合 S 上の時間に関して一様なマルコフ連鎖を考える.

(1) n ステップの推移確率を $p_n(x, y)$ で表す．$y \in S$ が非再帰的ならば, 任意の $x \in S$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x, y) < \infty$$

が成り立つことを示しなさい.

(2) 有限集合の上の既約なマルコフ連鎖が再帰的であることを示しなさい.

以上