解析学 F (金曜 1 講時) **中間試験問題** 2017.12.8 (Fri)

- 解答紙のみ提出してください.
- 本, ノート持込可能. 電子版は不可.

問題 1 (配点 55) 公平なコイン投げを記述する実確率変数列 $X_1, X_2, \cdots$ と確率 P を考える. すなわち, $X_1, X_2, \cdots$ は独立であって $P(X_j = 0) = P(X_j = 1) = 1/2$ をみたすとする.

(1) $0 < x \leqq 1$ に対し,

$$P\Big(\big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\big) - \frac{1}{2} \geqq \frac{x}{2}\Big) = \sum_{n(x+1)/2 \leqq j \leqq n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{j} \qquad (\bigstar)$$

が成り立つことを示しなさい.

(2) (1) の $(\bigstar)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\big\{-\frac{1}{n}\log(\bigstar)\big\}$$

を x の関数 $\psi(x)$ として求めなさい.

(3) $\psi''(x)$ を求め, $y = \psi(x)$ $(0 < x \leqq 1)$ のグラフを描きなさい.

問題 2 (配点 35) $V = (v_{ij})$ を d 次の正則な正定値実対称行列とし, $\mathbb{R}^d$ 上の確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{C}\exp\big\{-\frac{1}{2}(V^{-1}x, x)\big\}, \qquad x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

を考える. ただし, $(\ ,\ )$ は $\mathbb{R}^d$ の標準的な内積であり, C は正定数である.

(1) C の値を求めなさい.

(2) $i, j \in \{1, 2, \cdots, d\}$ に対し, 共分散

$$\int_{\mathbb{R}^d} x_i x_j f(x)dx$$

が v_{ij} に一致することを示しなさい.

問題 3 (配点 10) $\{0,1\}^\infty$ の部分集合族

$$\mathcal{E} = \Big\{\big\{(x_j) \in \{0,1\}^\infty \,\big|\, (x_1, \cdots, x_n) = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)\big\} \,\Big|\, n \in \mathbb{N},\ (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n\Big\}$$

を考える. A, B が $\mathcal{E}$ の元ならば, $A \subset B$, $A \supset B$, $A \cap B = \varnothing$ のどれかが成り立つことを示しなさい.